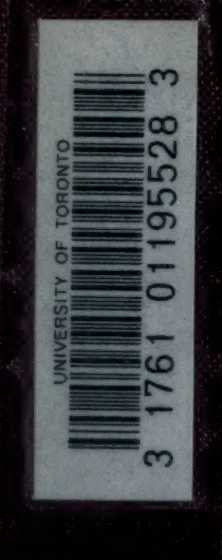

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195528 3

PRINCIPES ET PREMIERS DÉVELOPPEMENTS

DE

ÉOMÉTRIE GÉNÉRALE SYNTHÉTIQUE

MODERNE

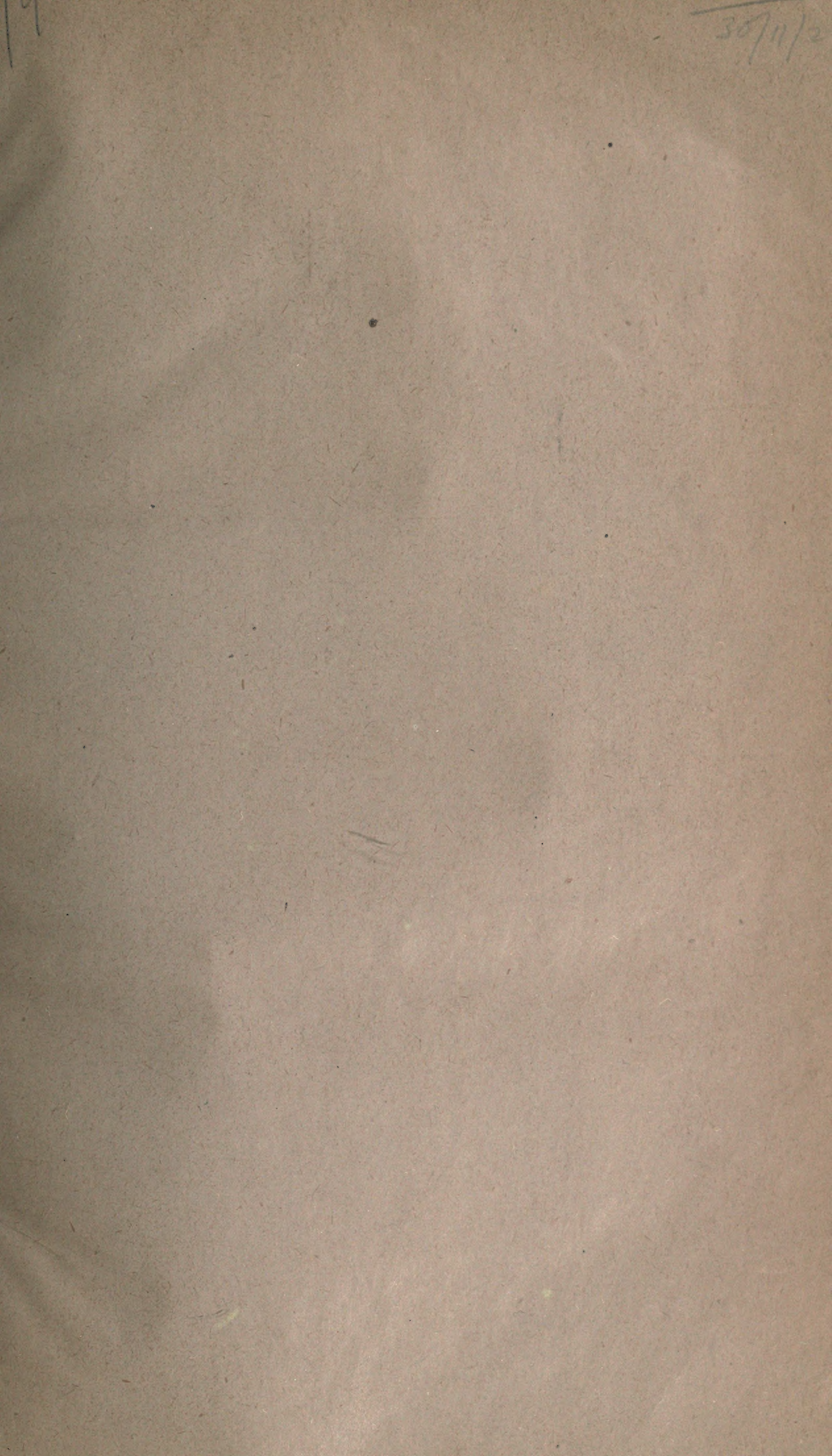
PAR

Émile BALLY



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1922



PRINCIPES ET PREMIERS DÉVELOPPEMENTS

DE

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE SYNTHÉTIQUE

MODERNE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

66675 55, quai des Grands-Augustins.

PRINCIPES ET PREMIERS DÉVELOPPEMENTS

DE

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE SYNTHÉTIQUE

MODERNE

PAR

Émile BALLY



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1922

PRÉFACE.

Ce Livre est dédié aux amis de la Géométrie.

Pour beaucoup d'entre eux, simples amateurs, les ingénieuses déductions géométriques sont d'agréables friandises qu'ils savourent sans arrière-pensée, sans trop s'inquiéter de quels éléments elles ont pu être composées.

D'autres plus méfiants, les « *critiques* », tiennent à savoir « ce qu'on y a mis »; quelques-uns de ceux-ci, les « *puristes* », ne peuvent tolérer certains ingrédients, et déclarent « *cuisine exécrable* » toute composition où ils en trouveraient la trace.

Tout en nous efforçant de plaire à la première catégorie de lecteurs (et ce Livre est avant tout l'Ouvrage d'un amateur s'adressant à des amateurs), nous nous sommes souciés de tenir compte des raisonnables exigences des critiques et des puristes, sans avoir toutefois la prétention de leur donner pleine satisfaction : un puriste n'est jamais satisfait.

Il est d'ailleurs malaisé de déployer une rigueur à l'abri de toute critique sans courir le risque de devenir fastidieux, et notre désir serait de plaire autant que de convaincre. (Cependant, comme ce Livre doit être accessible aux élèves des lycées, il nous arrivera souvent « *d'appuyer les points sur les i* »; nous souhaitons d'ailleurs que cet Ouvrage puisse être lu par toute personne intelligente, même étrangère aux mathématiques, exercée au raisonnement, et ayant le goût des abstractions.)

Dans les auteurs peu nombreux que nous avons entre les mains, le point de vue critique est délaissé (sauf dans les fascicules parus de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*).

Nous avons tenu à montrer que les bases de la Géométrie peuvent être directement rattachées au roc fondamental sur lequel doit désormais s'édifier toute construction de pure mathématique.

(C'est ce but qui justifie notre Chapitre préliminaire, où les éléments de l'Arithmétique sont exposés au point de vue ordinal.)

En Géométrie *pure*, ou *abstraite*, on considère des *éléments fondamentaux d'espèces diverses* (points, droites, plans, etc.) entre lesquels peuvent exister des relations *transitives*, dites *de superposition*, et qui satisfont à des hypothèses fondamentales dites *de superposition* (ou d'*appartenance*), exposées au début du Chapitre I.

Ces hypothèses et deux *postulats* (postulat *de Pappus* et postulat *de la disposition polygonale à caractère projectif de l'ensemble des points d'une droite*) suffisent au développement de la théorie.

Les postulats *de continuité* (*d'Archimède et de Cantor*) permettent l'application des classes fondamentales *à n dimensions* sur le *continuum analytique à n dimensions*, et dès lors toute question de Géométrie peut se traiter par le calcul.

Mais nous éviterons en général l'intrusion des procédés analytiques. (Il n'est nullement question, bien entendu, de proscrire systématiquement de la Géométrie ce précieux instrument d'investigation et de contrôle; mais une fois l'édifice achevé, il est préférable, s'il se peut, de faire disparaître les échafaudages auxiliaires qui en déparent l'architecture.)

Observons à ce sujet qu'*au point de vue critique*, l'introduction de l'Analyse dans la Géométrie, *telle qu'elle se fait souvent d'ordinaire*, laisse fort à désirer, puisque les notions *d'angle*, *de distance et autres analogues* sont habituellement considérées comme *primordiales* et résultant d'une *intuition directe*.

Ces notions ne seront pour nous que les *caractères abstraits* de classes d'éléments liés par une même *relation équivalentaire*. (*Voir* Chapitre préliminaire, § I, 3.)

Au point de vue moderne, ce ne sont point des notions acquises par expérience, ou supposées provenir d'une intuition directe, qui constituent l'objet essentiel des spéculations mathématiques : ce sont les *caractères abstraits* de ces notions, et c'est eux qu'il faut tout d'abord dégager.

A ce point de vue, la Science mathématique se réduirait à une branche de la Métaphysique; son domaine serait le domaine de l'*abstrait*, ou tout au moins la région de ce domaine qui n'est pas interdite à la faiblesse de nos facultés.

D'ailleurs, une fois bien spécifié le *caractère abstrait* des *notions géométriques*, on pourra restituer aux *éléments géométriques* leur *caractère intuitif*, précieux « *pour soutenir l'entendement* », suivant une expression de Poincaré, et qui constitue l'un des charmes propres de la Géométrie.

Nous ne donnerons en général aucune référence, n'ayant entre les mains que les Ouvrages de Darboux (*Classe remarquable de courbes et de surfaces*), de Dumont (*Surfaces cubiques*), de Duporcq (*Géométrie moderne*), et les fascicules parus dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*.

Nous ne revendiquons ni démonstration, ni mode d'exposition nous appartenant en propre, ces matières ayant été déjà l'objet des méditations de tant d'auteurs, qu'une démonstration que l'on croit nouvelle peut bien avoir été déjà trouvée.

Nous nous contenterons donc de laisser aux personnes versées dans ces questions le soin de rendre à chacun son dû.

ÉMILE BALLY.

Habitation Depaz, Morne-Rouge (Martinique).

P.-S. — Les tarifs actuels d'impression ne nous permettant pas de poursuivre immédiatement la publication de cet Ouvrage, nous avons ajouté à ce fascicule, qui ne devait comprendre que le Chapitre préliminaire et le Chapitre I, trois Chapitres (XII, XIII, XIV), consacrés à l'hexangle pascalien.

L'importance historique de la question, à laquelle sont attachés les noms de grands géomètres (*Steiner*, *Plücker*, *Cayley*, *Salmon*, *Véronèse*, d'après l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*), l'intrinsèque beauté de la configuration pascalienne, le curieux enchaînement et la remarquable simplicité des démonstrations font de ce sujet l'un des plus intéressants qui soient en Géométrie de position.

Cette partie de notre Ouvrage est d'ailleurs celle qui nous semblait avoir le plus de chances de comporter de l'inédit (nous ne pouvons là-dessus être très affirmatif, ne connaissant du sujet que les quelques pages qui y sont consacrées dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*).

La plupart des propriétés établies découlent d'une notation simple et particulièrement appropriée, qui permet de discerner les uns des autres les 60 hexagones du même hexangle.

Le Chapitre XII a pour objet l'étude de l'hexangle général et l'exposé de la notation précédente; les Chapitres XIII et XIV sont consacrés à l'hexangle pascalien.

La lecture de ces Chapitres n'exige nulle autre connaissance que celle du théorème fondamental de Desargues (triangles homologiques), et tout ce qui aurait trait à des notions non présentées au Chapitre I se trouve renvoyé en notes à la fin de l'Ouvrage.

Nous pensons que cette partie intéressera les amateurs de Géométrie, qui y trouveront des démonstrations et propriétés *peut-être inédites*.

L'Ouvrage se termine par quelques corrections et additions à notre précédent Volume sur les Quartiques de troisième classe.

PRINCIPES ET PREMIERS DÉVELOPPEMENTS

DE

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE SYNTHÉTIQUE MODERNE

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

ARITHMÉTIQUE ORDINALE.

I. — Généralités.

1. Étant admises les notions *d'élément unique*, *d'éléments distincts*, *d'ensemble d'éléments distincts*, les ensembles les plus simples qui s'offrent à notre conception sont :

Les ensembles *de puissance un* (puissance représentée par le *symbole*, ou *nombre cardinal* 1), dénommés *ensembles-unité* (notion de l'élément unique);

Les ensembles *de puissance deux* (puissance représentée par le *symbole* ou *nombre cardinal* 2), dénommés *paires*, ou *couples*, contenant un élément et un autre, distinct de celui-ci.

2. La notion de *caractère cardinal*, ou de *puissance*, d'un ensemble d'éléments distincts, résulte des considérations suivantes :

Un ensemble A est dit *abstraitement* et *simplement applicable* sur un ensemble B, si tout élément de A détermine [1] dans B un

---

[1] Il faut entendre par là la possibilité d'associer mentalement à tout élément de A un élément de B; nous dirons, pour faire image, que l'élément de A *recouvre l'élément associé* de B.

élément *unique*, *un couple d'éléments distincts de* A *déterminant un couple d'éléments distincts de* B.

Cette *relation* de A à B s'exprimera par l'écriture : A → B (A *applicable sur* B). Si A → B, et B → C, il en résulte A → C.

Les ensembles A et B sont dits *cardinalement équivalents* si chacun d'eux est applicable sur l'autre, c'est-à-dire si A → B et B → A, ce que représente l'écriture plus condensée A ⟷ B (A *équivalent à* B), où l'on peut permuter les termes A et B. De même que précédemment, si A ⟷ B et B ⟷ C, il en résulte A ⟷ C.

3. Le symbole ⟷ de l'équivalence cardinale est un symbole de *relation équivalentaire*.

Une *relation* d'un objet A à un objet B de notre conception est l'expression d'un certain caractère résultant pour l'objet A de sa comparaison à l'objet B. Si cette relation imprime à l'objet B *le même caractère*, par sa comparaison à l'objet A, elle sera dite *symétrique*. (Ex. : *droites sécantes*, *droites perpendiculaires*.)

Si une relation de A à B *s'étend également à partir de* A *à tout objet* X (distinct de B) *auquel elle s'applique à partir de* B, elle sera dite *transitive*. (Ex. : relation exprimée par le symbole → introduit ci-dessus; relations exprimées par les symboles $<$, ou $>$, dans la théorie des ensembles simplement ordonnés.)

Une relation *équivalentaire* est une relation *à la fois symétrique et transitive*.

Nous dirons que des objets, liés chacun à l'autre par une même relation équivalentaire, *ont un caractère abstrait commun*, qui, dans chaque cas particulier, recevra une dénomination particulière. (Ex. : caractère abstrait de droites parallèles : leur *direction;* caractère abstrait de figures superposables par un déplacement euclidien : leur *étendue*.)

4. Le caractère abstrait commun aux ensembles cardinalement équivalents à l'un d'eux, et par suite chacun à chaque autre, s'appelle leur *puissance;* elle se représente par un *symbole* appelé *nombre cardinal*. C'est la définition même de Russell :

« *Un nombre cardinal est un symbole qui représente une classe d'ensembles cardinalement équivalents.* »

5. Si dans une application simple d'un ensemble A sur un autre B, *tout élément de* B *est recouvert par un élément de* A, l'application sera dite *exacte*. On peut alors établir aussi une application *exacte* de B sur A, en déterminant chaque élément de A par l'élément de B que celui-là déterminait dans la première application.

Le *couple* de ces applications exactes inverses s'appelle une *correspondance biunivoque et réciproque*, ou *correspondance* (1,1).

Si l'on appelle « *partie* » d'un ensemble A, un ensemble X tel que A contienne tout élément de X, et renferme en outre *un* ou *des* éléments n'appartenant pas à X, la condition requise pour l'équivalence cardinale de deux ensembles peut s'énoncer ainsi : *Chaque ensemble doit être en correspondance biunivoque et réciproque avec une partie de l'autre* (qui est la partie recouverte dans l'application).

On montrera d'ailleurs plus loin (§ III, 5) que si deux ensembles sont applicables chacun sur l'autre, il est possible de concevoir entre eux une correspondance biunivoque et réciproque.

6. *Remarque I.* — D'une application d'un ensemble A sur un ensemble B, on peut déduire une autre application, ou un élément *arbitraire* a de A recouvre un élément *arbitraire* b de B.

En effet, si l'élément b n'est pas recouvert dans l'application donnée, il suffit de découvrir l'élément de B recouvert par a, et d'appliquer a sur b. Si b est recouvert par a', et si a recouvre b', il suffit d'appliquer a' sur b' (ou sur un élément non recouvert de B) et a sur b, sans rien changer au reste.

Remarque II. — Si A est applicable sur B, toute partie de A est aussi applicable sur B.

II.

1. Couples ordonnés. — 2. Ensembles simplement ordonnés.

1. Les éléments d'un couple peuvent être *différenciés*, par exemple, par leurs *dénominations*. Le couple devient alors un *couple ordonné*.

En général, pour ordonner *semblablement* des couples arbitraires, on rapportera terme à terme les éléments de chacun d'eux à

ceux d'un même *couple abstrait fondamental*, dont les éléments sont différenciés en un *antérieur* et un *postérieur*.

L'élément appliqué sur l'antérieur sera dit *antérieur* à l'autre, lequel lui sera *postérieur; a* étant antérieur à b, on écrit $a < b$, ou $b > a$. (Il faut lire « *antérieur à* », « *postérieur à* », et non « *plus petit que* », ou « *plus grand que* », et n'attacher d'ailleurs à ces termes d'autre sens que celui de « *dénominations distinctes servant à différencier les éléments d'un couple* ».)

2. Un ensemble est *simplement ordonné*, s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Tous ses couples d'éléments sont *semblablement ordonnés*, c'est-à-dire sont rapportés *au même couple fondamental abstrait* (*antérieur-postérieur*).

2° Si une *paire* de couples (a, b), (b, c) de l'ensemble ont un élément *commun* b, se comportant différemment dans les applications de chacun de ces couples sur le fondamental (c'est-à-dire, par exemple, b postérieur à a, mais antérieur à c), le couple (a, c) des éléments *non communs* doit s'appliquer sur le fondamental de telle sorte que chacun de ses éléments y soit rapporté *de la même manière qu'il l'était dans celui des couples* (de la paire envisagée) *où il figure*.

Autrement dit, les conditions $a < b$, $b < c$, entraînent $a < c$.

Ou encore : les relations de différenciation données entre les éléments de tous les couples de l'ensemble sont *transitives*.

III. — Chaînes discrètes.

1. Chaînes discrètes simples. — 2. Propriété fondamentale. — 3. Numérotage d'ensembles applicables sur la suite fondamentale. — 4. Invariance du nombre. — Correspondance biunivoque et réciproque de deux ensembles applicables chacun sur l'autre.

1. Dans un ensemble *simplement ordonné*, soit un couple (a, b), où a est l'antérieur et b le postérieur; s'il n'y a pas d'élément x distinct de a et de b qui soit postérieur à a et antérieur à b, l'élément a est dit l'antérieur immédiat ou l'*antécédent* de b, lequel est le postérieur immédiat, ou le *consécutif* de a.

S'il y a un élément A antérieur à tout autre, ce sera l'*extrémité initiale* de l'ensemble; s'il y a un élément B postérieur à tout autre, ce sera l'*extrémité finale*.

Si tout élément (sauf l'extrémité initiale, lorsqu'elle existe) est pourvu d'un antécédent et aussi (sauf l'extrémité finale, lorsqu'elle existe) d'un consécutif, on dit que l'ensemble est ordonné *en chaîne discrète*, à *une*, *deux extrémités ou sans extrémités*.

Les chaînes discrètes à une seule extrémité s'appelleront : *suites discrètes* (*ascendantes* ou *descendantes*, suivant que l'extrémité est initiale ou finale). Les chaînes discrètes sans extrémités s'appelleront : *échelles discrètes*.

Nous appellerons : chaînes discrètes *simples*, celles pour lesquelles on admet la possibilité d'atteindre tout élément arbitrairement donné par le passage successif d'un élément à son consécutif, à partir d'un élément antérieur arbitraire, et d'un élément à son antécédent à partir d'un élément postérieur arbitraire.

Il est aisé d'éliminer la notion concrète de *temps*, que semble impliquer la locution de *passage successif*, employée ici uniquement pour faire image, en énonçant ainsi la condition de simplicité :

Si l'on considère une partie de la chaîne, constituée par deux éléments arbitraires a, b ($a < b$) et tous les éléments intermédiaires (postérieurs à a et antérieurs à b), *nulle application de cette partie sur elle-même, satisfaisant à ces deux seules conditions* : 1° que l'élément initial a recouvre son consécutif; 2° que tout élément recouvert par son antécédent recouvre lui-même son consécutif (sauf l'élément final b, qui, s'il est recouvert par son antécédent, viendra recouvrir l'élément initial a), *ne peut laisser inaltéré aucun élément de cette partie*. (Une telle application satisfaisant à ces deux conditions doit donc être *unique*.)

Une chaîne discrète n'est pas nécessairement simple.

Soient en effet deux chaînes *simples* sans élément commun, l'une sans extrémité finale (suite ascendante), l'autre sans extrémité initiale (suite descendante).

L'ensemble des éléments de ces deux chaînes peut être ordonné en chaîne discrète à deux extrémités, si l'on convient que deux éléments d'une même suite primitive soient ordonnés dans le nouvel ensemble comme ils l'étaient dans cette suite, et que tout élément de la suite ascendante soit antérieur à tout élément de la suite descendante.

Tout élément du nouvel ensemble ayant ainsi même antécédent et même consécutif que dans la suite primitive où il figure, cet ensemble se trouve ordonné en une chaîne discrète ayant pour élément initial l'extrémité de la suite ascendante, et pour élément final l'extrémité de la suite descendante.

Seulement, il n'est possible d'atteindre un élément à partir d'un autre élément antérieur (par le passage successif d'un élément à son consécutif) que si les deux éléments considérés appartiennent à une même suite primitive.

(Autrement dit, a appartenant à la suite ascendante et b à la descendante, une application sur elle-même de la partie de la nouvelle chaîne qui s'étend de a à b, satisfaisant aux conditions : que a recouvre son consécutif et que tout élément recouvert par son antécédent recouvre lui-même son consécutif, *n'est pas univoquement définie par ces conditions, lesquelles ne sont pas ici suffisantes pour affecter les éléments de la partie appartenant à la seconde chaîne.*)

Nous ne considérerons dans ce qui suit que les chaînes discrètes *simples*, et pour abréger nous supprimerons le qualificatif de *simples*, ce qui ne peut prêter à aucune confusion.

2. Propriété fondamentale. — *Si une propriété définie pour tout élément d'une chaîne discrète est établie pour l'un de ces éléments x, et si l'hypothèse qu'elle s'applique à un élément arbitraire non antérieur à x entraîne qu'elle s'applique aussi à l'élément consécutif, elle sera établie pour tout élément de la chaîne non antérieur à x.*

Car cette hypothèse permet de construire une chaîne discrète de propositions à une extrémité initiale recouvrant consécutivement les éléments de la première chaîne à partir de x, et atteignant tout élément de celle-ci postérieur à x.

3. Nous appellerons « application *régulière* » (pour la distinguer de toute autre où il ne serait pas tenu compte de l'ordre des éléments) d'une chaîne discrète A sur une autre B, celle où *l'antécédent et le consécutif de tout élément a de A s'appliquent sur l'antécédent et le consécutif de l'élément b de B recouvert par a.*

Si de plus l'extrémité initiale de A s'applique sur l'extrémité initiale de B, ce sera une application régulière *à coïncidence initiale.*

Toute chaîne discrète simple pourvue d'une extrémité initiale sera abstraitement caractérisée par son application régulière à coïncidence initiale sur une *suite abstraite fondamentale ascendante simple*, dont les éléments, dénommés *numéros*, sont représentés par des *symboles* qui sont les *nombres ordinaux finis*.

Cette application est toujours possible, car chaque élément de la chaîne à définir, susceptible d'être atteint à partir de l'extrémité initiale (au sens indiqué précédemment) peut s'appliquer sur un numéro conformément à la loi de l'application régulière, et l'on admet (puisqu'il s'agit de chaîne simple) qu'il est possible d'atteindre tout élément de la chaîne.

Nous appellerons « *portion initiale* » de la suite fondamentale, une chaîne discrète ayant pour extrémité finale un numéro déterminé, constituée par ce numéro et tous les numéros antérieurs de la suite, pris dans leur ordre respectif (ce qui veut dire que tout numéro de la portion a même antécédent que dans la suite).

Cette portion est complètement définie par le numéro final.

Soient deux portions initiales A, B, caractérisées par les numéros a, b, de leurs extrémités finales. Si $a > b$, la portion A, comprenant tous les numéros antérieurs à a, comprend donc tous les numéros de B, et au moins un numéro (à savoir a) non compris dans B. La portion B est donc une *partie* de A.

Théorème. — *Une portion initiale ne peut s'appliquer sur aucune de ses parties.*

(Ici l'application n'est pas supposée *régulière*, mais *quelconque*, et il faut aussi entendre « *partie* » dans le sens *général* antérieurement défini : ensemble de numéros de la portion, mais non de tous, pouvant d'ailleurs n'être pas consécutifs.)

Supposons la proposition établie pour la portion B, dont le numéro final b est l'antécédent dans la suite du numéro final a de A, et supposons que A s'applique sur l'une de ses parties C.

Celle-ci ne peut être B lui-même, car en supprimant dans A l'élément final a, et dans B l'élément recouvert par a dans l'application, on voit que B, partie restante de A, s'appliquerait sur la partie res-

tante de B, c'est-à-dire sur une de ses propres parties, contrairement à l'hypothèse faite sur B.

Si le numéro final a de A n'est pas compris dans C, C est une partie de B, sur laquelle B, partie de A, s'appliquerait (§ I, 6, Rem. II), contrairement à l'hypothèse.

Si ce numéro final a figure dans C, on peut déduire de l'application une autre, où a de A s'applique sur a de C (§ I, 6, Rem. I).

Mais alors, après suppression de l'élément a dans A et C, la partie restante de C est une partie de B (elle ne peut être B lui-même, sans quoi C contiendrait tout élément de A et n'en serait pas une partie), sur laquelle la partie restante de A, c'est-à-dire B, s'appliquerait, contrairement à l'hypothèse.

Le théorème envisagé, s'appliquant d'ailleurs à la portion réduite à l'extrémité initiale de la suite (puisque cette portion, réduite à un unique élément, n'a pas de partie), est établi. C. Q. F. D.

Toute chaîne discrète simple à deux extrémités détermine, par son application régulière à coïncidence initiale sur la suite fondamentale, une portion initiale, dont le numéro final est le numéro recouvert par l'extrémité finale de la chaîne.

Tous les numéros de la portion étant recouverts, celle-ci est inversement applicable sur la chaîne.

Si un ensemble *quelconque* est applicable (*au sens général*) sur la suite fondamentale, il se trouve ordonné, par cette application même, en chaîne discrète simple à extrémité initiale. Car l'ensemble des numéros recouverts, *que leurs antécédents et consécutifs soient ou non aussi recouverts*, est une chaîne discrète simple à extrémité initiale, *si l'on convient d'y ordonner tout couple de numéros comme il se trouve ordonné dans la suite.*

Un ensemble applicable *au sens général* sur la suite fondamentale, peut donc aussi s'y appliquer (par l'intermédiaire de la chaîne discrète que la première application détermine dans cet ensemble) de manière que *tout numéro antérieur à tout numéro recouvert soit aussi recouvert.*

Cette dernière application, bien que l'ensemble ne soit pas initialement donné sous forme de chaîne discrète, peut être aussi dite *régulière*, et s'appelle « *numérotage* » des éléments de l'ensemble.

Si *tout numéro* de la suite fondamentale est recouvert dans cette application régulière, l'ensemble est dit « *infini dénombrable* ».

Sinon, l'ensemble recouvrant seulement les numéros d'une portion initiale, sera dit « *fini* », parce que notre mentalité bornée conçoit la possibilité d'embrasser un tel ensemble dans une intuition collective, où les éléments soient individuellement discernables ([1]).

4. Deux applications régulières d'un même ensemble fini sur la suite fondamentale déterminent la même portion initiale, car si les deux portions déterminées étaient distinctes, l'une serait une partie de l'autre, et celle-ci s'appliquerait sur sa partie (par l'intermédiaire de l'ensemble envisagé).

Ou comme on dit vulgairement : *de quelque façon que l'on numérote les éléments d'un ensemble fini*, en passant (à partir d'un élément initial arbitraire) d'un élément à un autre distinct des éléments déjà atteints, *on parvient toujours au même dernier numéro.*

On peut donc caractériser la *puissance* d'un ensemble fini par *le numéro final* de la portion initiale qu'il détermine par son application régulière sur la suite fondamentale.

C'est pourquoi les mêmes symboles, appelés « *nombres naturels* », représentent indifféremment les *nombres cardinaux* des ensembles finis, et les *nombres ordinaux* des chaînes discrètes simples à deux extrémités, ou ensembles bien ordonnés finis.

5. Démontrons la proposition énoncée antérieurement, que si deux ensembles A et B sont applicables chacun sur l'autre, on peut concevoir une application *exacte* de A sur B.

Désignons par A/B et B/A les deux applications simples *non exactes* données de A sur B et de B sur A.

Soit a_0 un élément arbitraire de A; dans l'application A/B il recouvre un élément b_0 de B; dans l'application B/A, celui-ci recouvre un élément a_1 de A, lequel à son tour recouvre par l'application A/B un élément b_1 de B, et ainsi de suite.

On forme ainsi une chaîne discrète simple qui a pour extrémité initiale a_0, et dont les éléments sont alternativement un a et un b.

Supposons que l'on arrive à un élément b_n qui par l'application B/A s'applique sur un des a précédents, qui est nécessairement a_0, le seul qui ne soit pas encore recouvert par l'un des b de la chaîne.

([1]) Bien qu'elle soit en réalité incapable d'une telle intuition pour un ensemble fini même peu considérable.

Alors, dans l'application cherchée, nous appliquerons tout a de la chaîne précédente sur le b qui lui est consécutif, et tous les b de la chaîne seront recouverts. Cette application, pour ce qui concerne la partie de A comprise dans la chaîne, se confond donc avec l'application A/B.

Si aucun élément b_n atteint par le procédé indiqué ne vient recouvrir a_0 dans l'application B/A, la chaîne discrète devient une suite ascendante. Nous reculerons son extrémité initiale par le procédé suivant :

Si a_0 est recouvert dans l'application B/A, soit b^1 l'élément de B qui le recouvre; b^1 *sera l'antécédent de* a_0. Si b^1 est recouvert dans l'application A/B, soit a^1 l'élément de A qui le recouvre; nous prendrons a^1 pour antécédent de b^1, et ainsi de suite.

Si tout élément a^x ou b^z atteint par ce procédé est recouvert dans l'application suivante B/A ou A/B, la suite se transforme en *échelle*, et nous pourrons dans l'application cherchée appliquer chaque a de l'échelle sur le b consécutif, et tous les b de l'échelle seront recouverts.

Si l'on arrive au contraire à un élément qui ne soit pas recouvert dans l'application donnée (de l'autre ensemble sur celui auquel il appartient), cet élément deviendra l'extrémité initiale de la suite.

Si cet élément initial est un a, nous appliquerons encore chaque a de la suite sur le b consécutif, et tous les b de la suite seront recouverts.

Mais si cette extrémité initiale est un b, il faudra, pour recouvrir tous les b de la suite, appliquer chaque a sur le b antécédent.

Tout élément a ou b de A ou de B, déterminant une chaîne analogue aux précédentes, l'application finale exacte cherchée de A sur B résulte de l'ensemble des applications partielles, effectuées à l'aide de ces diverses chaînes, suivant les règles indiquées.

IV. — Addition et soustraction.

1. Glissement d'une échelle. — 2. Composition additive, relativement à un élément donné, des éléments d'une échelle. — 3. Nombres négatifs.

1. Une *échelle* est une chaîne discrète simple *sans extrémités*.

On appellera « *glissement* » d'une échelle *une application de cette échelle sur elle-même, où le consécutif et l'antécédent de*

tout élément s'appliquent sur le consécutif et l'antécédent de l'élément recouvert par celui-là.

Un glissement est complètement défini si l'on donne l'élément z_r sur lequel doit s'appliquer un élément donné z.

A partir de z s'étendent en effet deux suites discrètes ayant pour extrémité commune z et recouvrant toute l'échelle (l'une, ascendante, passe d'un élément de l'échelle à son consécutif; l'autre, descendante, d'un élément à l'antécédent); et dans un glissement qui amène z en z_r, chacune d'elles s'applique régulièrement sur la chaîne analogue qui a son extrémité en z_r, déterminant pour chacun de ses éléments l'élément qu'il recouvre.

Un tel glissement se représentera par l'écriture $(z \to z_r)$.

Dans un glissement, d'après sa définition même, la chaîne discrète qui a pour extrémités deux éléments arbitraires a, b, s'applique régulièrement sur la chaîne discrète qui a pour extrémités les éléments a_r, b_r, recouverts par les premiers; et réciproquement, si la chaîne de a à b est régulièrement applicable sur la chaîne de a_r à b_r, l'élément b recouvrira b_r dans le glissement $(a \to a_r)$ de a à a_r.

On dira alors que les couples ordonnés (a, b), (a_r, b_r) de l'échelle sont *superposables*.

De plus, la chaîne discrète qui s'étend d'un élément a à l'élément recouvert a_r, est régulièrement et exactement applicable sur toute chaîne analogue, par exemple sur celle qui s'étend de b à b_r.

Il suffit évidemment de le faire voir dans le cas où b est un élément *juxtaposé* de a (antécédent ou consécutif).

Or, si b est consécutif de a, l'élément b_r recouvert par b dans un glissement arbitraire sera, par définition même, consécutif de l'élément a_r recouvert par a; et alors, dans le glissement de l'échelle qui amène chaque élément sur son consécutif (*glissement élémentaire positif*), a s'appliquant sur b et a_r sur b_r, la chaîne de a à a_r s'applique régulièrement sur celle de b à b_r.

On conclut de là que si dans le glissement de $(a \to a_r)$, b recouvre b_r, dans le glissement $(a \to b)$, a_r recouvrira b_r.

Ou encore : *si les couples* (a, b), (a_r, b_r) *sont superposables, les couples* (a, a_r), (b, b_r) *le sont aussi.*

2. On désignera par $S_z(a, b)$, et l'on appellera *somme relative à z des éléments a et b*, l'élément x sur lequel s'applique b dans le

glissement $(z \rightarrow a)$, où z vient recouvrir a; ou encore, *l'élément x tel que les couples (z, a), (b, x) soient superposables.*

De la propriété qui vient d'être établie pour les couples superposables, il résulte que

$$S_z(a, b) = S_z(b, a),$$

le signe $(=)$ signifiant que l'élément représenté par $S_z(a, b)$ est le même que l'élément désigné par $S_z(b, a)$.

S_z est un symbole d'*opération commutative*, appelée *addition selon z*, par laquelle tout couple *non ordonné* d'éléments (distincts ou non) de l'échelle, considéré relativement à z, détermine univoquement un élément de cette échelle.

On voit aisément que, quel que soit l'élément a,

$$S_z(a, z) = S_z(z, a) = a,$$

l'élément z est dit *élément d'effet nul* dans l'opération S_z.

L'égalité

$$S_z(a, b) = S_z(a, c)$$

entraîne

$$b = c,$$

car, dans un même glissement $(z \rightarrow a)$, les éléments recouverts par deux éléments b, c, supposés distincts, sont toujours distincts.

En désignant généralement le consécutif et l'antécédent de l'élément x par le même symbole x, postérieurement ou antérieurement accentué (soit x' et $'x$), on voit que si l'on pose

$$S_z(a, b) = x,$$

on aura

$$S_{'z}(a, b) = x', \qquad S_{z'}(a, b) = {'x};$$

car, par exemple, si l'antécédent de z s'applique sur a, l'antécédent de b s'applique sur x, et b s'applique sur le consécutif x' de x.

Si donc on a une relation

$$S_z(x_1, x_2) = S_z(y_1, y_2),$$

on aura également

$$S_{z'}(x_1, x_2) = S_{z'}(y_1, y_2),$$
$$S_{'z}(x_1, x_2) = S_{'z}(y_1, y_2),$$

d'où, quel que soit u,

$$S_u(x_1, x_2) = S_u(y_1, y_2).$$

Or, si les couples (a, b), (m, n) sont superposables, on a

$$n = S_a(a, n) = S_a(b, m),$$

puisque dans le glissement $(a \to b)$, m vient en n.

Donc, *quel que soit* u,

$$S_u(a, n) = S_u(b, m),$$

propriété caractéristique de toute paire de couples superposables de l'échelle : *les sommes* (selon un élément arbitraire u) *des termes non homologues coïncident.*

Or, les couples (a, c) et $[S_z(b, a), S_z(b, c)]$ sont superposables puisque dans le glissement $(z \to b)$, a vient *par définition* en $S_z(b, a)$, et c en $S_z(b, c)$.

Donc

$$S_z[S_z(b, a), c] = S_z[a, S_z(b, c)];$$

ou, puisque

$$S_z(b, a) = S_z(a, b),$$

on a finalement

$$S_z[S_z(a, b), c] = S_z[a, S_z(b, c)],$$

relation qui exprime la propriété *associative* de l'addition.

Cette propriété permet de supprimer les parenthèses dans l'expression d'une somme dont les éléments sont définis par d'autres sommes.

Si l'élément z est fixé une fois pour toutes, on écrit $a + b$, ou $b + a$, au lieu de $S_z(a, b)$, et $S_z[S_z(a, b), c]$ s'écrit $a + b + c$.

Pour obtenir la somme de divers éléments, on peut faire arbitrairement des sommes partielles de ces éléments, puis la somme des éléments représentés par ces sommes partielles.

3. On appelle « *symétrique de a relatif à z* », et l'on désigne par $\overline{a}_z$ (ou plus simplement par $\overline{a}$, si z est définitivement fixé), l'élément qui vient recouvrir z dans le glissement $(z \to a)$.

On a donc, par définition,

$$S(a, \overline{a}) = a + \overline{a} = \overline{a} + a = z.$$

Le symétrique $\overline{\overline{a}}$ de $\overline{a}$, vérifiant la relation

$$\overline{\overline{a}} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{\overline{a}} = z,$$

n'est autre que a, ce qu'exprime la relation

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

Le symétrique d'une somme de deux éléments est la somme des symétriques de ces éléments :

$$\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b},$$

car

$$(a+b) + \bar{a} + \bar{b} = (a+\bar{a}) + (b+\bar{b}) = z + z = z.$$

Cette propriété s'étend aux sommes de plusieurs éléments.

La *soustraction* est une opération (*inverse* de l'addition) qui, appliquée à un couple *ordonné* (a, b) d'éléments de l'échelle, détermine un élément x, tel que

$$b + x = x + b = a.$$

Par définition, la relation

$$D_z(a, b) = x$$

signifie donc

$$(b+x) = (x+b) = a.$$

Si $\bar{b}$ est le symétrique de b relatif à z, on a

$$D_z(a, b) = a + \bar{b},$$

car

$$b + (a+\bar{b}) = (b+\bar{b}) + a = z + a = a.$$

On voit que la soustraction d'un élément peut toujours se remplacer par l'addition du symétrique de cet élément.

Le *résultat* d'un ensemble d'opérations élémentaires (additions et soustractions à effectuer sur des éléments donnés) sera déterminé si l'on sait obtenir le symétrique d'un élément individuellement donné, ou représenté par une somme d'autres éléments.

Il suffit d'appliquer les relations

$$\bar{\bar{a}} = a,$$

$$\overline{(a+b+c+\ldots)} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots.$$

On écrit généralement $-x$ au lieu de $\bar{x}$, et le signe $(+)$, immédiatement suivi du signe $(-)$, est supprimé.

Dans l'*échelle fondamentale*, à laquelle on peut rapporter toute autre par application régulière, l'élément z relativement auquel sont définies les sommes et différences des autres éléments, est représenté par le symbole o (*zéro*). Les éléments qui s'étendent à partir de zéro en passant d'un élément au consécutif sont, dans leur ordre naturel, *les éléments de la suite des nombres naturels, un étant consécutif de zéro*, et ceux qui s'étendent à partir de zéro en passant d'un élément à l'antécédent, et qui sont les symétriques relatifs à zéro des précédents, forment l'*ensemble des nombres négatifs*.

V. — Multiplication.

1. Définition. — 2. Propriétés fondamentales. — 3. Point de vue cardinal.

1. On peut extraire d'une échelle primitive donnée d'autres échelles, dont tous les éléments appartiennent à la première.

Considérons en particulier l'échelle suivante, dénommée *échelle secondaire relative à a et attachée à la primitive en z*, échelle définie par les conditions suivantes :

Elle contient les éléments z et a de la primitive, et l'élément a *s'y trouve par définition consécutif de z* (bien que dans la primitive l'élément a puisse être antérieur à z); et dans le glissement $(z \rightarrow a)$ de la primitive, tout élément de la primitive qui appartient à la secondaire recouvre un élément appartenant aussi à la secondaire, et qui se trouve être son consécutif dans cette secondaire.

(Autrement dit, en appelant *glissement élémentaire positif* celui où tout élément d'une échelle recouvre son consécutif, le glissement $(z \rightarrow a)$ *de la primitive* détermine un glissement élémentaire positif *de la secondaire*).

Si maintenant on fait *une application régulière de la primitive sur la secondaire*, où z de la primitive recouvre z de la secondaire, l'élément c de la secondaire sur lequel s'applique l'élément b de la primitive, est *le produit selon z de a par b*, et se représente par l'écriture :

$$c = ab.$$

L'échelle secondaire relative à a, et celle relative au symétrique $\overleftarrow{a}$ de a sont dites *symétriques*. Dans l'application de la primitive sur deux secondaires symétriques, les éléments recouverts dans ces

secondaires par un même élément b de la primitive sont *symétriques* dans la primitive; donc, si

$$ab = c,$$

on aura aussi

$$\bar{a}b = \bar{c}.$$

Dans l'application de la primitive sur toute secondaire, deux éléments b et $\bar{b}$ symétriques de la primitive recouvrent dans la secondaire deux éléments qui sont des éléments symétriques de la primitive.

Donc, si

$$ab = c,$$

on aura aussi

$$a\bar{b} = \bar{c}.$$

Il en résulte

$$(\bar{a})(\bar{b}) = \bar{\bar{c}} = c = ab.$$

2. Pour établir les propriétés fondamentales de la multiplication, nous ferons usage de la notation déjà employée, où le consécutif *dans la primitive* d'un élément représenté par une certaine expression est représenté par cette même expression *postérieurement accentuée*.

En général, quel que soit x,

$$x' = x + z'$$

(relation exprimant que dans le glissement où z recouvre son consécutif z', tout élément x recouvre son consécutif x').

On a aussi

$$xz' = x,$$

car dans l'application de la primitive sur la secondaire relative à x, où z de la primitive recouvre z de la secondaire, le consécutif z' de z dans la primitive recouvre le consécutif x de z dans la secondaire.

On a également

$$z'x = x,$$

car la secondaire relative à z' coïncide avec la primitive.

D'ailleurs, si xy ou yx coïncide avec x, on en déduit

$$y = z'.$$

Le consécutif z' de l'élément (z) d'effet nul dans l'addition est l'élément (unique) d'effet nul dans la multiplication.

On a toujours

$$xz = z,$$

car z de la primitive s'applique sur z de toute secondaire.

On a aussi

$$zx = z,$$

car l'échelle secondaire relative à z se réduit à l'unique élément z.

Pour ce qui va suivre, rappelons les relations

(1) $$x + y' = y + x' = (x + y)' = (x + y + z').$$

De la définition même de l'échelle secondaire relative à un élément x, il résulte que l'élément xy que vient recouvrir y dans l'application de la primitive sur la secondaire, est lié à l'élément xy' sur lequel s'applique le consécutif y' de y par la relation

(2) $$xy' = xy + x.$$

On a, *quel que soit l'élément* b,

$$b'z' = b' = b + z' = bz' + z'.$$

Supposons démontrée la relation

$$b'a = ba + a,$$

quel que soit l'élément b *et pour chaque élément* a *non postérieur à un élément donné.*

Cette relation s'étendra au consécutif a' de a, car, d'après (2),

$$b'a' = b'a + b' = ba + a + b' = ba + b + a' = ba' + a'.$$

On a donc toujours, *quels que soient les éléments* b *et* a,

$$b'a = ba + a,$$

c'est-à-dire

(3) $$y'x = yx + x.$$

En comparant (2) et (3), on voit que si

$$xy = yx,$$

on aura aussi

$$xy' = y'x.$$

On en conclut que l'on aura toujours

$$xy = yx,$$

relation qui exprime la propriété *commutative* de la multiplication.

La relation (2) peut s'écrire

$$x(y + z') = xy + xz'.$$

Supposons démontré que

$$a(b + c) = ab + ac.$$

On aura, en vertu de (1) et de (2),

$$a(b+c') = a(b+c)' = a(b+c) + a = ab + ac + a = ab + (ac + a) = ab + ac'.$$

On a donc *toujours* la relation

$$a(b + c) = ab + ac,$$

exprimant *la propriété distributive relativement à l'addition.*

Enfin, on a

$$a(bz') = ab = (ab)z'.$$

Supposons démontré que

$$(ab)c = a(bc).$$

On aura

$$(ab)c' = (ab)c + ab = a(bc) + ab.$$

En vertu de la propriété distributive,

$$a(bc) + ab = a(bc + b) = a(bc'),$$

d'où

$$(ab)c' = a(bc').$$

On a donc toujours

$$(ab)c = a(bc),$$

relation qui exprime la propriété *associative* de la multiplication.

Si l'échelle primitive se trouve être l'échelle fondamentale des entiers positifs et négatifs, le signe du produit se trouve univoquement déterminé par application des relations précitées :

$$\bar{a}b = a\bar{b} = \overline{ab},$$
$$(\bar{a})(\bar{b}) = \overline{\overline{ab}} = ab.$$

3. La théorie des opérations élémentaires a été présentée au point de vue ordinal. Ce point de vue a été choisi de préférence, parce que c'est de cette façon que s'introduisent le plus naturellement les nombres négatifs et les nombres rationnels, et aussi parce que nous retrouverons des notions analogues dans les questions de *disposition en chaîne fermée* et de *sens*, qui seront exposées au Chapitre III.

Au point de vue cardinal, on appelle *somme de deux nombres cardinaux* a, b, représentant les puissances de deux ensembles finis A, B, le nombre cardinal c qui représente la puissance d'un ensemble C tel que tout élément de A et tout élément de B soit un élément de C, et que tout élément de C soit un élément de A ou de B. (On suppose d'ailleurs que A et B n'ont pas d'élément commun.)

Si l'on prend pour nombres cardinaux des ensembles finis les nombres ordinaux des portions initiales sur lesquelles ils s'appliquent régulièrement, on aura, au sens indiqué précédemment,

$$c = a + b,$$

car le nombre ordinal attaché à un ensemble fini étant, comme on l'a vu, invariable, quelle que soit la façon dont on effectue l'application régulière, on peut, dans l'application de C, appliquer d'abord les éléments de A, puis ceux de B.

Le produit des nombres cardinaux a et b sera le nombre cardinal qui représente la puissance de l'ensemble des couples non ordonnés dont un élément appartient à A et l'autre à B.

On voit aisément que cette puissance est celle d'un ensemble de a ensembles égaux à B, ou de b ensembles égaux à A, et qu'elle est représentée par le nombre ordinal ab ou ba précédemment défini.

VI. — Éléments d'Analyse combinatoire.

1. Permutations. — 2. Arrangements. — 3. Combinaisons.

1. Soit P_n la puissance de l'ensemble qui a pour éléments constitutifs *les n-uples ordonnés distincts de n éléments distincts* (n-uples dénommés *permutations rectilignes simples* de ces éléments).

Si l'on exclut un élément déterminé, et que l'on suppose formé l'ensemble des $(n-1)$-uples ordonnés des $n-1$ autres éléments,

en introduisant dans chacun de ces $(n-1)$-uples l'élément exclus, et lui attribuant successivement le rang $1, 2, \ldots, n$, on formera sans omission ni répétition l'ensemble des n-uples ordonnés de ces n éléments.

Donc

$$P_n = n.P_{n-1}.$$

On en conclut

$$P_n = n(n-1)\ldots 2.1,$$

produit qui se représente par le symbole $n!$

2. Soit A_n^k la puissance de l'ensemble qui a pour éléments constitutifs *les k-uples ordonnés distincts* de n éléments distincts $(k < n)$, k-uples dénommés *arrangements simples k-aires* de ces n éléments.

Chacun de ces k-uples, et l'un des $(n-k)$-uples ordonnés des $n-k$ autres éléments (ils sont au nombre de $P_{n-k} = (n-k)!$ peuvent être associés de manière à former un n-uple ordonné, si par exemple on convient que tout élément du k-uple soit antérieur à tout élément du $(n-k)$-uple, et que deux éléments appartenant soit au k-uple, soit au $(n-k)$-uple, soient ordonnés comme ils l'étaient primitivement.

Ce procédé fournit sans omission ni répétition tous les k-uples ordonnés de n éléments, d'où

$$A_n^k.P_{n-k} = P_n,$$

ou

$$A_n^k.(n-k)! = n! \tag{2}$$

3. Soit enfin C_n^k la puissance de l'ensemble qui a pour éléments constitutifs *les k-uples non ordonnés distincts* de n éléments distincts, ou *combinaisons simples k-aires* de ces n éléments $(k < n)$.

Chacun de ces k-uples non ordonnés fournit P_k k-uples ordonnés des k éléments qui le constituent, l'ensemble total de ces derniers k-uples n'étant autre que l'ensemble de puissance A_n^k des k-uples *ordonnés* de k éléments. Donc

$$C_n^k.P_k = A_n^k,$$

ou encore, multipliant les deux membres par $(n-k)!$ et tenant compte de la relation (2), on a

$$C_n^k.k!(n-k)! = n!$$

VII. — Nombres rationnels.

1. Division. — 2. Ensemble partout dense en lui-même. — 3. Nombres rationnels. — 4. Puissance de l'ensemble des nombres rationnels.

1. L'opération *inverse* de l'addition n'est possible, dans l'ensemble des nombres *naturels*, que si dans le couple ordonné auquel elle s'applique, le premier élément de ce couple est postérieur au second dans l'ensemble.

Mais elle devient toujours possible si l'on adjoint à cet ensemble le nombre o (qui est au point de vue ordinal l'*antécédent de* 1, et au point de vue cardinal, peut être considéré comme la puissance de l'ensemble-*nul*, déduit de l'ensemble-unité par suppression de l'élément unique qui y figure) et les *symétriques* des nombres naturels relatifs à o, c'est-à-dire *les nombres négatifs*. Ce nouvel ensemble est l'ensemble *des entiers*.

Dans ce dernier ensemble, l'opération inverse de la multiplication, ou *division*, n'est pas toujours possible. Pour qu'elle le soit, il faut que dans le couple *ordonné* (m, n) auquel elle s'applique, le premier terme soit un multiple du second, c'est-à-dire que

$$m = an;$$

a est alors dit le *quotient*, ou *résultat* de la division de m par n, et l'on peut, dans ce cas, représenter a par le symbole m/n.

Comme

$$mq = anq,$$

a est aussi réprésentable par mq/nq, par suite par une infinité de symboles qui doivent être considérés comme équivalents.

Deux symboles m/n, p/q, ne peuvent être *équivalents*, c'est-à-dire représenter le même entier x, que si

$$m = xn, \qquad p = xq,$$

d'où

$$mq = np;$$

et si ces symboles représentent deux entiers a et b distincts, où $a < b$, on a nécessairement

$$mq < np.$$

D'ailleurs, si

$$m = an, \qquad p = bq,$$

on a

$$mq = anq, \qquad pn = bnq,$$
$$(mq + pn) = (a + b)nq,$$

et l'entier $a + b$ est représentable par le symbole $(mq + pn)/nq$, lequel peut être considéré comme *la somme des symboles* m/n *et* p/q.

De même,

$$mp = abnq,$$

d'où la représentation du produit ab par le symbole mp/nq, qui peut être considéré comme le produit de symboles m/n et p/q.

Ces remarques justifient les règles, à première vue assez arbitraires, qui permettent d'ordonner l'ensemble des nombres rationnels, considérés comme *classes de couples ordonnés d'entiers*, et qui déterminent leur composition par addition et multiplication.

2. Dans l'ensemble des *nombres rationnels*, la division (sauf par o) devient toujours possible. De plus, cet ensemble sera *simplement ordonné* de façon à conserver l'ordre naturel des entiers, mais tout élément *y sera dépourvu d'antécédent et de consécutif*, et l'ensemble sera *partout dense en lui-même*.

Dans un ensemble simplement ordonné, les éléments dépourvus *d'antécédent mais non de consécutif*, ou *de consécutif mais non d'antécédent*, abstraction faite des extrémités, sont dits des *éléments-limites d'un seul côté*. Ceux qui sont dépourvus à la fois d'antécédent et de consécutif sont des *éléments-limites des deux côtés*. On confond généralement ces deux sortes d'éléments sous la désignation commune d'*éléments-limites*.

Ils jouissent de la propriété que voici : tout couple de l'ensemble qui *enserre* l'élément considéré (c'est-à-dire dont le premier terme est antérieur et le second postérieur à cet élément) enserre également au moins un autre élément de l'ensemble, distinct du premier.

Pour l'élément-limite des deux côtés, tout couple *dont cet élément est l'un des constituants* enserre au moins un élément de l'ensemble.

Si tous les éléments sont limites des deux côtés, l'ensemble est dit

« *partout dense en lui-même* »; alors entre deux éléments quelconques, il s'en trouve d'autres, intermédiaires.

Si tous les éléments étant limites, il y en a qui ne le soient que d'un seul côté, l'ensemble sera dit « *simplement dense en lui-même* », et la propriété précédente n'est plus nécessairement assurée. Un tel ensemble s'obtient en supprimant d'un ensemble partout dense en lui-même les éléments intermédiaires (et parfois une extrémité) à des couples distincts et n'empiétant pas les uns sur les autres.

[Un exemple d'ensemble ne contenant outre ses éléments consécutifs que des éléments-limites d'un seul et même côté, est fourni par l'ensemble des polynomes entiers en ω, à coefficients entiers et positifs, si l'on convient que deux polynomes soient ordonnés (l'un par rapport à l'autre) comme le sont leurs degrés, et s'ils sont de même degré, comme le sont les coefficients des termes de même degré le plus élevé qui soient différents. Tout polynome pourvu d'un terme m indépendant de ω a un antécédent et un consécutif, savoir les polynomes qui n'en diffèrent que par le terme analogue, qui est $m-1$ ou $m+1$. Les polynomes auxquels manque ce terme ont un consécutif, mais *pas d'antécédent*. Ces polynomes représentent les *nombres ordinaux transfinis inférieurs à* ω^ω.]

3. On appelle *nombre rationnel* une *classe de couples ordonnés d'entiers*, tels que si l'on divise les deux termes de chaque couple par leur plus grand commun diviseur, on obtienne le même couple d'entiers premiers entre eux, dit *couple irréductible*.

Les couples ordonnés d'entiers, envisagés à ce point de vue, s'appellent *fractions* (le premier terme du couple est le *numérateur*, et le second, le *dénominateur*); une fraction de numérateur x et de dénominateur y se représentera par l'écriture x/y.

Deux fractions m/n, p/q, représentent *le même nombre rationnel*, et doivent donc être considérées comme *équivalentes*, ce qu'on écrit

$$m/n = p/q,$$

s'il existe deux nombres entiers a et b tels que les termes de la première en soient des équimultiples, et que les termes de la seconde en soient aussi d'autres équimultiples

$$m = ha, \qquad n = hb; \qquad p = ka, \qquad q = kb;$$

d'où l'on conclut

$$mq = np.$$

Le couple $m/1$ (et par suite tout couple mn/n) a même signification que l'entier m. Tout couple $0/n$ signifie 0, et les couples $m/0$ sont exclus (ou parfois remplacés par un seul symbole $1/0$, ou ∞).

L'ensemble des nombres rationnels est simplement ordonné par la convention suivante, qui respecte l'ordre naturel des entiers.

Deux fractions de même dénominateur sont ordonnées comme le sont leurs numérateurs. Deux fractions de dénominateurs différents seront remplacées chacune par une équivalente, de façon que ces dernières aient même dénominateur, et l'on comparera leurs numérateurs.

Par exemple, a/b et a'/b' étant remplacées par A/B et A'/B, comme

$$aB = Ab, \qquad a'B = A'b',$$

d'où

$$ab'B = Abb', \qquad ba'B = A'bb',$$

on voit que la condition $A < A'$ entraîne $ab' < ba'$, d'où la règle

$$a/b < a'/b', \qquad \text{si} \qquad ab' < ba'.$$

On voit qu'elle est indépendante des fractions équivalentes auxiliaires considérées, et qu'elle ordonne de la même manière tout système de deux fractions respectivement équivalentes aux proposées, c'est-à-dire, en définitive, *les deux nombres rationnels* que représentent ces deux classes de fractions.

D'ailleurs, si l'on a à la fois

$$a/b < c/d, \qquad c/d < m/n,$$

c'est-à-dire

$$ad < bc, \qquad cn < dm,$$

d'où

$$adcn < bcdm,$$

on aura

$$an < bm,$$

c'est-à-dire

$$a/b < m/n,$$

ce qui montre que l'ensemble des nombres rationnels est simplement ordonné.

La *somme* de deux fractions m/n, p/q est une fraction équivalente à $(mq + pn)/nq$.

Si les fractions m/n, p/q sont *respectivement équivalentes* aux fractions a/b, c/d, la somme des premières est équivalente à la somme des secondes. Car l'égalité

$$(mq + pn)bd = (ad + cb)nq$$

résulte des égalités

$$mb = an, \qquad pd = cq.$$

La somme des nombres rationnels définis par deux fractions est donc bien déterminée.

Le *produit* de deux fractions m/n, p/q est une fraction *équivalente à* mp/nq. Si les fractions m/n, p/q sont équivalentes aux fractions a/b, c/d, les deux produits mp/nq, ac/bd sont équivalents, car l'égalité

$$mpbd = acnq$$

résulte encore des égalités

$$mb = an, \qquad pd = cq.$$

Le quotient d'une fraction m/n par une fraction a/b est une fraction x/y, dont le produit par la seconde soit équivalente à la première. On a évidemment

$$x/y = mb/an = (m/n).(b/a).$$

La fraction b/a, quotient de 1 par a/b, est l'*inverse* de celle-ci; le quotient de deux fractions est le produit du dividende par l'inverse du diviseur.

Entre deux éléments *quelconques* distincts a/b, c/d, de l'ensemble des nombres rationnels, il se trouve des éléments intermédiaires.

Ainsi, entre les éléments précédents, où l'on suppose $a/b < c/d$, se place tout élément m/n, tel que

$$a/b < m/n < c/d,$$

ou

$$an < bm, \qquad dm < nc,$$

ou

$$adn < bdm < bcn.$$

L'écart des termes extrêmes, équimultiples des entiers *distincts* ad et bc ($ad < bc$) devenant pour des valeurs suffisamment élevées de n supérieur à tout entier arbitrairement donné, ceux-ci comprendront,

dès que leur écart surpassera bd, des multiples de bd. L'un d'eux, bdm, fournit le terme m qui, associé à n, donne un nombre rationnel m/n compris entre a/b et c/d.

L'ensemble des nombres rationnels est donc *simplement ordonné et partout dense en lui-même;* on va voir qu'il est *dénombrable.*

4. L'ensemble des *couples ordonnés d'entiers positifs* (où deux couples sont ici considérés comme *distincts* dès qu'ils ne sont pas *identiques*) peut être mis en relation biunivoque et réciproque avec l'ensemble des nombres naturels.

En effet, tout entier positif est représentable, par exemple, et d'une seule manière, par la formule

$$N = 2^{m-1}(2n-1),$$

si l'on convient que, pour $m = 1$,

$$2^{m-1} = 1;$$

m et n peuvent prendre toute valeur entière positive, *zéro exclus.*

Cette formule réalise évidemment une correspondance biunivoque et réciproque entre les entiers (N) et les couples d'entiers (m, n).

Si dans cette formule on met n, par exemple, sous une forme analogue :

$$n = 2^{x-1}(2y-1),$$

on réalise une correspondance biunivoque et réciproque entre les entiers positifs N et les triples ordonnées m, x, y d'entiers positifs.

En continuant ainsi, on réalise une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des entiers positifs et celui des k-uples ordonnés d'entiers positifs.

L'ensemble des nombres rationnels positifs, qui peut être considéré comme l'ensemble des couples ordonnés *irréductibles* d'entiers positifs, est mis par ce procédé en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble des nombres naturels. Ce dernier ensemble *faisant partie du premier*, les deux ont même puissance.

L'ensemble des nombres rationnels peut d'ailleurs être numéroté par le procédé suivant :

L'ensemble des fractions *irréductibles de même dénominateur* n forme une suite discrète où elles sont ordonnées comme leurs numé-

rateurs. Si a_m/n est le m-ième terme de cette suite, on lui fera correspondre l'entier

$$N = 2^{m-1}(2n-1),$$

et réciproquement, à tout entier N mis sous cette forme, on fera correspondre la m-ième fraction irréductible de dénominateur n.

Pour connaître le rang m dans sa suite d'une fraction irréductible $\frac{a}{n}$, il suffit d'ailleurs de connaître le rang de toute fraction irréductible de numérateur inférieur à n.

Si

$$a = kn + r_p \qquad (r_p < n),$$

où p est le rang de r_p dans la suite des nombres inférieurs à n et premiers à n [le nombre de ceux-ci se représente par $\varphi(n)$], on aura

$$m = k\varphi(n) + p,$$

et réciproquement, si

$$m = k\varphi(n) + p \qquad [p < \varphi(n)],$$

le numérateur de la m-ième fraction irréductible de dénominateur n sera

$$a_m = kn + r_p,$$

où r_p est le p-ième *nombre inférieur et premier à n.*

L'ensemble des n-uples ordonnés *irréductibles* d'entiers (les termes de chaque n-uple sont *premiers dans leur ensemble*), dénommé *ensemble de points rationnels de l'espace à n — 1 dimensions*, étant contenu dans l'ensemble des n-uples, et contenant l'ensemble des $(n-1)$-uples, tous deux dénombrables, est aussi dénombrable.

VIII. — Coupures et continu analytique.

1. Coupures. — 2. Suites convergentes. — 3. Continu analytique.

1. Dans un ensemble simplement ordonné, tout élément (sauf une extrémité, s'il y en a) sépare l'ensemble en deux ensembles partiels ou *portions* n'ayant aucun élément commun, et comprenant dans leur totalité tous les éléments de l'ensemble, sauf l'élément considéré ; ce sont l'ensemble des éléments antérieurs et celui des éléments posté-

rieurs à cet élément. Si l'on place arbitrairement cet élément dans l'un ou l'autre de ces deux ensembles, la totalité des éléments de l'ensemble primitif se trouve répartie en deux classes, telles que tout élément de l'une soit antérieur à tout élément de l'autre.

Une *telle séparation* des éléments d'un ensemble simplement ordonné s'appelle une *coupure*; quand elle est déterminée par un élément de l'ensemble, la classe antérieure a une extrémité finale, ou la classe postérieure une extrémité initiale, savoir l'élément considéré.

Nous appellerons dans tous les cas ces deux classes : *bords antérieur* et *postérieur de la coupure*.

Il est aisé de voir que dans un ensemble simplement ordonné, partout dense en lui-même, il peut se trouver des coupures qui ne soient pas déterminées par un élément de l'ensemble.

(Ainsi, dans l'ensemble des nombres rationnels positifs, ceux dont le carré est inférieur à 2 et ceux dont le carré est supérieur à 2 constituent deux portions comprenant la totalité des éléments de l'ensemble, *puisqu'aucun nombre rationnel n'a* 2 *pour carré*, et tout élément de la première est antérieur à tout élément de la seconde.)

Deux éléments m, n ($m < n$) séparent l'ensemble en *trois portions* : A, I, P. La première comprend les éléments antérieurs, et la dernière, les éléments postérieurs aux éléments considérés.

La portion intermédiaire I dénommée *intervalle* $\overline{mn}$, comprend les éléments postérieurs à m et antérieurs à n (dénommés *éléments intérieurs* de l'intervalle), et aussi les éléments m, n, dénommés *extrémités* de l'intervalle.

(Si l'un des éléments m ou n est une extrémité de l'ensemble, la portion extérieure A ou P correspondante disparaît; si les éléments m et n sont *juxtaposés* dans l'ensemble, l'intervalle $\overline{mn}$ *n'a pas d'élément intérieur*.)

Un intervalle I_x sera dit *contenu dans* un intervalle I_z, si tout élément de I_x (intérieur *et* extrême) est un élément de I_z (intérieur *ou* extrême.

Si cette condition n'est pas remplie (il faut et il suffit pour cela qu'une extrémité de I_x soit extérieure à I_z), l'intervalle I_x sera dit *exclus de* I_z. (*Exclus de* signifie donc ici *non totalement contenu dans*; on ne veut point dire que les deux intervalles considérés ne puissent avoir d'éléments communs.)

Il est assez naturel de définir une *coupure* d'un ensemble simplement ordonné par une *suite discrète* d'intervalles, *enserrant tous la coupure*, c'est-à-dire ayant une extrémité *sur chaque bord* de celle-ci, *contenus chacun dans le précédent*, et jouissant de cette propriété qu'à tout élément *de l'ensemble* (sauf celui qui détermine la coupure, si celle-ci est produite par un élément) on puisse associer *un intervalle de la suite auquel cet élément soit extérieur*. Cet élément sera alors aussi extérieur à tout intervalle *de la suite* postérieur (*dans la suite*) à l'intervalle mentionné.

Appelons *suite disjonctive d'intervalles* une suite discrète illimitée d'intervalles contenus chacun dans le précédent, et tels que, étant tout intervalle arbitraire I_x *de l'ensemble*, il se trouve *dans la suite* un intervalle I_n (de rang *n dans cette suite*) duquel I_x soit *exclus*; I_x est alors aussi exclus des intervalles *de la suite* de rangs postérieurs à n (dans cette suite). Autrement dit, *il n'y a pas d'intervalle de l'ensemble qui soit simultanément contenu dans tous les intervalles de la suite.*

Toute suite disjonctive d'intervalles *définit une coupure*, si l'on convient que la portion de l'ensemble antérieure à un intervalle appartient *au bord antérieur*, et sa portion postérieure, *au bord postérieur de la coupure.* Un élément en effet dont la position ne serait pas définie relativement à ce mode de partage en deux classes des éléments de l'ensemble, ne saurait être qu'un élément *commun à tous les intervalles de la suite.* Or, il ne peut y avoir *deux* tels éléments, car leur intervalle I_x serait contenu dans tous ceux *de la suite*, alors que d'après l'hypothèse faite sur la suite, *on peut y trouver un intervalle* I_n *duquel* I_x *soit exclus.*

On voit donc que tout élément, *sauf peut-être un*, est extérieur à l'un des intervalles de la suite (et par conséquent aux intervalles postérieurs), et le *bord* auquel il appartient est bien déterminé.

Réciproquement, à toute coupure d'un ensemble simplement ordonné, partout dense en lui-même, on peut associer arbitrairement une suite d'intervalles contenus chacun dans le précédent, enserrant tous la coupure, ne pénétrant, à partir d'un certain rang, à l'intérieur de nul intervalle dont les deux extrémités sont sur un même bord de la coupure, et ayant tous (à partir d'un certain rang) au moins une extrémité intérieure à tout intervalle qui enserre la coupure.

Deux suites *disjonctives* d'intervalles (I), (J), définissent la même

coupure, si tout intervalle I et tout intervalle J ont des éléments communs (au moins une extrémité).

Si cette condition n'est pas remplie, on peut déterminer un intervalle I_k et un intervalle J_p extérieurs l'un à l'autre; leur position relative définit *l'ordre relatif des coupures représentées par les suites* (I) *et* (J) (dans l'ensemble des coupures de l'ensemble donné).

L'ensemble des coupures d'un ensemble simplement ordonné (y compris celles déterminées par ses propres éléments) est donc aussi simplement ordonné. Si l'ensemble donné est *dense en lui-même*, l'ensemble de ses coupures est *parfait*, c'est-à-dire *fermé* et *dense en lui-même*. Un ensemble simplement ordonné *fermé* est d'ailleurs celui où toute coupure est susceptible d'être produite par un élément de l'ensemble.

2. Dans chacun des intervalles I_n d'une suite *disjonctive*, prenons arbitrairement un élément a_n; la suite illimitée

$$(A) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots, \quad a_p, \quad \ldots$$

est dite une *suite convergente*.

Une *suite d'éléments* (A) pris dans un ensemble simplement ordonné est donc *convergente*, si l'on peut lui associer une *suite disjonctive d'intervalles* (I) telle que chaque intervalle I_n de cette suite (I) contienne tous les éléments de la suite (A) postérieurs à a_n.

Deux telles suites *disjonctives* (I), (J) d'intervalles, associés *à la même suite convergente d'éléments* (A), définissent *la même coupure* puisque les intervalles I_k et J_p ont toujours des éléments communs, par exemple les éléments de la suite (A) postérieurs à a_n

$$(k, p < n).$$

Dans le cas où l'ensemble d'éléments envisagé est celui des nombres rationnels (simplement ordonné, partout dense en lui-même), on appelle « *écart* » de l'intervalle $\overline{mn}$ la valeur absolue de la différence entre ses extrémités.

La dernière condition imposée aux intervalles d'une suite disjonctive (I), savoir qu'à tout intervalle de *l'ensemble* on puisse associer un intervalle de la suite (I), dont le premier soit exclus, se traduit alors ainsi :

A tout nombre rationnel positif arbitraire x correspond dans la suite (I) un intervalle I_n dont l'écart soit inférieur à x (car il est évident : 1° qu'on peut toujours loger un intervalle d'écart x à l'intérieur d'un intervalle d'écart supérieur, et 2° que tout intervalle arbitraire d'écart x se trouve *exclus* de tout intervalle d'écart inférieur à x).

Dans ce même ensemble, à tout nombre rationnel x, on peut associer un entier n, tel que tous les termes d'une *suite convergente* (A) postérieurs au n-ième soient enfermés dans un intervalle I_n, d'écart inférieur à x. Il résulte de là *que la différence de deux termes quelconques* a_p, a_q, *postérieurs au n-ième*, *est inférieure à* x.

Réciproquement, si cette dernière condition est remplie pour une suite (A), soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r, \quad \ldots$$

une suite (X) de nombres rationnels positifs décroissants, et pouvant devenir inférieurs à tout nombre rationnel positif donné.

Déterminons une suite (K) *d'entiers* croissants

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_p, \quad \ldots$$

tels que la valeur absolue de la différence de deux termes quelconques de la suite (A), de rangs postérieurs à k_p, soit inférieure à x_p.

On peut alors déterminer un intervalle I_{k_1}, d'écart $2x_1$, contenant tous les éléments de la suite (A) postérieurs à a_{k_1} (la valeur absolue de la différence de deux d'entre eux étant inférieure à x_1), ensuite un intervalle I_{k_2} d'écart $2x_2 < 2x_1$, *contenu dans le précédent* et contenant tous les termes de la suite (A) postérieurs à a_{k_2}, etc. L'écart de ces intervalles, *contenus chacun dans le précédent*, devenant inférieur à tout nombre rationnel arbitraire, ces intervalles forment une *suite disjonctive*, et déterminent une coupure.

On peut objecter à ceci que la suite a_{k_1}, a_{k_2}, ... est une suite extraite de la suite donnée (A), et non cette suite elle-même. Mais on peut compléter ainsi la suite d'intervalles : la chaîne d'éléments de (A) qui s'étend de a_{k_p} à $a_{k_{(p+1)}}$ étant *discrète et finie*, on remontera de a_{k_1} à a_1, de a_{k_2} à a_{k_1}, etc., de la façon suivante :

Nous prendrons pour I_{k_1-1} un intervalle contenant I_{k_1} et l'élément a_{k_1}, est en général, pour I_{k_1-p} un intervalle contenant I_{k_1-p+1} et l'élément a_{k_1-p+1}. Nous prendrons pour I_{k_2-q} un intervalle contenant I_{k_2-q+1} et l'élément a_{k_2-q+1}, *et qui soit contenu dans* I_{k_1}, ce qui est toujours possible, puisque I_{k_1} contient tous les éléments de la suite (A) posté-

rieurs à a_{k_1}, etc. Un certain nombre (fini) d'intervalles peuvent d'ailleurs coïncider.

3. *L'ensemble des coupures praticables dans l'ensemble des nombres rationnels* constitue l'ensemble *des nombres réels*, ou *continu analytique linéaire.*

Tout nombre réel positif peut être défini par une suite disjonctive (I) d'intervalles

$$I_0, \quad I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_p, \quad \ldots,$$

où les extrémités de I_p sont deux fractions consécutives de même dénominateur n^p, soit m/n^p et $(m+1)/n^p$, dites *valeurs approchées du nombre, par défaut et par excès, à* $1/n^p$ *près*. L'écart de ces valeurs, égal à $1/n^p$, devient, pour un choix convenable de p, inférieur à tout nombre rationnel x, arbitrairement donné.

Tout nombre réel positif inférieur à 1 peut être représenté par *une suite illimitée d'entiers positifs ou nuls, inférieurs à un entier arbitraire donné* n : c'est le *développement* n*-ésimal du nombre.*

Le développement du nombre en fraction continue régulière conduit à une conclusion analogue, seulement les entiers de la suite ne sont plus astreints à être inférieurs à un entier donné.

La puissance du *continu linéaire* est donc celle de l'ensemble des suites illimitées d'entiers, inférieurs ou non à un entier donné; en particulier, c'est celle de l'ensemble des suites illimitées de deux entiers (0 et 1).

L'ensemble des n-uples ordonnés de nombres réels, ou *continu à* $n-1$ *dimensions*, a même puissance que l'ensemble des nombres réels.

A tout nombre réel A, défini par la suite

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, a_p, \ldots),$$

on peut en effet faire correspondre le n-uple :

$$\begin{array}{l} K_1 = (k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1n}, \ldots, k_{1p}, \ldots), \\ K_2 = (k_{21}, k_{22}, \ldots, k_{2n}, \ldots, k_{2p}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_n = (k_{n1}, k_{n2}, \ldots, k_{nn}, \ldots, k_{np}, \ldots \end{array}$$

où

$$k_{hp} = a_{h+(p-1)n}$$

et réciproquement.

On montre d'ailleurs que la puissance du continu est supérieure à celle d'un ensemble dénombrable.

Nota. — Nous pourrions faire rentrer dans ce Chapitre préliminaire les questions de *disposition en chaîne fermée* et de *sens*, qui peuvent s'exposer indépendamment de toute considération géométrique, ainsi que les définitions élémentaires relatives aux transformations. Mais pour n'avoir pas à rappeler ces notions, nous préférons les exposer quand l'occasion s'en présentera (Chap. III et VII).

CHAPITRE I.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE.

I. — Les fondements de la Géométrie générale.

1. Éléments géométriques fondamentaux, leur *espèce* ou *polynarité*. — 2. Relations de superposition. — 3. Hypothèses de superposition ou d'appartenance. — 4. Configuration caractéristique, support minimé de n points distincts. — 5. Hypothèse secondaire. — 6. Remarques sur les domaines binaire et ternaire. — 7. Support minimé (élément de jonction) et axe maximé (élément d'intersection) d'éléments distincts. — 8. Relation capitale entre les polynarités de deux éléments et celles de leurs éléments de jonction et d'intersection.

1. La *Géométrie générale de position* ou *Géométrie synthétique moderne*, envisage un ensemble d'éléments fondamentaux de diverses espèces, entre lesquels peuvent exister des relations *transitives non symétriques* (*voir* Chap. prél., § I, 3), appelées souvent « relations d'*appartenance* », et que nous qualifierons, au moins provisoirement, de relations de *superposition* [*voir* la note (¹)].

Les *éléments géométriques fondamentaux* recevront la dénomination spécifique de *plans*.

On distinguera : les éléments (ou plans) *primordiaux* ou *primaires*, appelés aussi *points;* les éléments (ou plans) *binaires*, appelés aussi *droites* (espaces à une dimension); les éléments (ou plans) *ternaires*, appelés aussi *plans ordinaires* (espaces à deux dimensions); les éléments (ou plans) *quaternaires* ou *hyperplans* (espaces ordinaires à trois dimensions), etc.; les éléments (ou plans) *n-aires* (lisez ène-aires), espaces à $n - 1$ dimensions, etc.

L'espèce d'un élément sera caractérisée par un entier positif non nul que nous appellerons sa *polynarité;* c'est le nombre *minimé* d'éléments primaires ou *points* distincts, susceptibles de déterminer univoquement l'élément considéré, sous la condition de lui être attachés par des relations de superposition (en vertu de la première hypothèse fondamentale exposée un peu plus loin).

Pour indiquer l'espèce d'un élément, on fera figurer sa polynarité en exposant du symbole qui désigne cet élément. Ainsi, on pourra désigner un plan n-aire par l'expression P_x^n, l'exposant n étant sa polynarité et l'indice variable x servant à distinguer les uns des autres des plans isopolynaires.

(La polynarité d'un élément est supérieure d'une unité à ce que l'on appelle d'habitude le *nombre de dimensions* de cet élément.)

2. Une relation de *superposition* d'un plan k-aire P^k à un plan n-aire P^n *de polynarité supérieure* ($k < n$), est une relation *par définition transitive et non symétrique*, en vertu de laquelle nous dirons que l'élément P^k *repose sur* (1) l'élément P^n.

Cette relation étant *asymétrique* par définition, si les polynarités des éléments envisagés sont distinctes, il en résulte une relation inverse (également transitive et asymétrique), dite *d'infraposition*, de l'élément de polynarité supérieure P^n à l'élément de polynarité inférieure P^k, en vertu de laquelle nous dirons que P^n *supporte* P^k. Nous dirons encore indifféremment, pour exprimer la relation de superposition de P^k à P^n ($k < n$) que P^n est un *support* de P^k, ou que P^k est un *axe* de P^n (2).

En vertu de la transitivité de la relation de superposition, si un élément P^k repose sur un élément P^n ($k < n$), tout élément P^x de polynarité x inférieure à k reposant sur P^k repose aussi sur P^n, et plus généralement sur tout élément P^z (de polynarité z supérieure

---

(1) On dit plus communément que P^k *appartient à* P^n. La locution « *appartient à* », d'où dérive l'expression de relation d'*appartenance*, vient de ce que l'on considère habituellement un plan de polynarité n comme un *sous-ensemble de points*, univoquement déterminé à travers un ensemble initial de points par n points de cet ensemble (n'appartenant simultanément à nul ensemble de polynarité inférieure à n), conformément aux hypothèses fondamentales d'appartenance. On dit alors que le plan P^k appartient au plan P_n ($k < n$), si les points du *sous-ensemble* (P^k) appartiennent au *sous-ensemble* de points (P^n) : la relation d'appartenance est alors évidemment transitive. Mais nous aimons mieux considérer les plans d'espèces diverses comme des entités distinctes de l'ensemble des points qui peuvent y reposer; l'ensemble des points reposant sur un même plan n-aire s'appellera un *champ ponctuel n-aire*. En adoptant ce point de vue, la transitivité de la relation de superposition doit être posée par définition.

(2) On qualifie souvent d'éléments *unis* deux éléments entre lesquels existe une relation de superposition. Il convient d'observer que cette forme symétrique donnée à la relation de superposition *cesse d'être transitive* : ainsi, une droite et un plan ternaire étant unis, un point uni au plan n'est généralement pas uni à la droite.

à n) supportant P^n. Ou encore : si P^n supporte P^k, tout *axe* de P^k est axe de P^n et de tout support de P^n.

3. *Hypothèses fondamentales de superposition* (*ou d'appartenance*). — 1° Deux points distincts reposent toujours *sur une unique même droite;* trois points distincts, *ne reposant pas simultanément sur une même droite*, reposent toujours *sur un unique même plan ternaire*; et plus généralement, n points distincts, *ne reposant simultanément sur nul élément de polynarité inférieure à* n, reposent toujours *sur un unique même plan* n*-aire*.

2° Un plan n-aire qui porte k points ($k < n$) ne reposant simultanément sur nul élément de polynarité inférieure à k, porte aussi le plan k-aire *unique* qui supporte ces k points (et, par suite, porte anssi tous les éléments de polynarités inférieures à k supportés par ce plan k-aire).

3° Si un plan n-aire P^n et une droite P^2 reposent sur un même plan $(n+1)$-aire, il y a toujours au moins un point reposant simultanément sur la droite et sur ce plan n-aire, c'est-à-dire qui soit un *axe commun* à ces deux éléments. (S'il y a deux tels éléments, il résulte de l'hypothèse précédente que le plan n-aire supporte la droite et tout point reposant sur cette droite.)

4. Nous dirons que n points distincts sont les *sommets* d'une même *configuration caractéristique* n*-aire*, s'ils ne reposent simultanément sur nul élément de polynarité inférieure à n.

L'existence de configurations n-aires résulte immédiatement : 1° de l'existence *admise* de configurations $(n-1)$-aires; 2° de l'hypothèse que tous les points de l'ensemble fondamental géométrique ne reposent pas simultanément sur un même plan $(n-1)$-aire; 3° de la première hypothèse fondamentale, admise jusqu'à la polynarité $n-1$ inclusivement.

Car si un point ne repose pas sur le plan $(n-1)$-aire *unique* qui porte les sommets d'une configuration $(n-1)$-aire, ces $n-1$ sommets et le point envisagé sont les sommets d'une même configuration n-aire. Ils né reposent simultanément, en effet, ni sur nul plan $(n-1)$-aire, puisque le plan $(n-1)$-aire *unique* qui porte les $(n-1)$ premiers points ne supporte pas le dernier; ni sur nul plan de polynarité inférieure à $n-1$, puisque les $n-1$ premiers,

sommets d'une configuration caractéristique $(n-1)$-aire, ne sauraient reposer simultanément sur un tel plan.

Deux points distincts ont toujours un support commun binaire unique; n points distincts ont toujours *un* ou *des* supports communs de polynarités comprises entre 2 et n, pouvant atteindre ces limites (s'ils n'ont nul support commun de polynarité inférieure à n, ils ont un support commun n-aire).

Un support de polynarité *minimé* commun à n points distincts est *unique*, et s'il a pour polynarité k, il y a toujours parmi les points du n-uple envisagé au moins un système de k points formant une configuration caractéristique k-aire.

Car si on l'admet pour $n' = n-1$, le support minimé *unique* de $n-1$ des points du n-uple porte, s'il a pour polynarité k, une configuration caractéristique k-aire formée par k de ces $n-1$ points; s'il porte le n-ième point, c'est le support minimé du n-uple, et il satisfait à la condition énoncée. Sinon, le plan $(k+1)$-aire *unique* qui porte ces k points et le n-ième point [ce dernier, ne reposant pas sur le plan k-aire, forme avec les k précédents une configuration $(k+1)$-aire] est le support minimé unique, et il jouit de la propriété mentionnée.

On a construit une configuration caractéristique n-aire par l'adjonction à une configuration $(n-1)$-aire, d'un point ne reposant pas sur le plan $(n-1)$-aire qui porte les sommets de celle-ci.

Réciproquement, $n-1$ sommets arbitraires d'une configuration caractéristique n-aire sont les sommets d'une configuration caractéristique $(n-1)$-aire. Car la polynarité k de leur support minimé ne saurait être inférieure à $n-1$, sans quoi k de ces $n-1$ points formeraient une configuration caractéristique k-aire de ce support minimé, et le plan $(k+1)$-aire unique de support de ces k points et du n-ième point supportant aussi les $n-1$ points envisagés (2e hypothèse), et en définitive tous les n points, aurait une polynarité inférieure à n.

Il en résulte immédiatement que k sommets arbitraires d'une configuration n-aire forment une configuration caractéristique k-aire.

5. *Hypothèse secondaire.* — Tout plan n-aire porte *au moins un point*, et si l'on considère un ensemble *fini* de points distincts et d'éléments distincts de polynarités diverses inférieures à n reposant

sur un même plan n-aire, ce plan supporte *au moins un point* distinct des points de l'ensemble et ne reposant sur nul élément de l'ensemble (ou, comme on dit souvent, *extérieur* à tout élément de l'ensemble).

Il résulte de cette hypothèse secondaire qu'un plan n-aire porte *toujours* des systèmes de n points le déterminant effectivement, c'est-à-dire ne reposant simultanément sur nul élément de polynarité inférieure à n, autrement dit *des configurations caractéristiques n-aires.*

Car s'il porte une configuration caractéristique k-aire ($k < n$), il porte aussi (hypothèse fondamentale 2) le plan k-aire de support de cette configuration, ainsi qu'un point extérieur à ce plan (hypothèse secondaire) et formant avec les k premiers une configuration caractéristique ($k+1$)-aire.

[Cette conclusion cesse d'être la conséquence d'une hypothèse, si l'on adopte le point de vue d'appartenance, mentionné dans la note (¹), un plan n-aire étant alors envisagé comme un ensemble de points déterminé par n de ses points formant une configuration n-aire.]

La relation de superposition n'a été définie que pour deux éléments de polynarités différentes. Si on l'étend à deux éléments *isopolynaires* P_1^n, P_2^n, on voit qu'elle devient symétrique et entraîne la coïncidence de ces éléments. Car, en supposant que P_1^n porte P_2^n, il portera aussi un système de n points caractéristique de ce dernier et se confondra par suite avec lui, le plan n-aire qui supporte un tel système étant unique.

Si l'on étend la deuxième hypothèse fondamentale au cas de $k = n$, tout plan est pour soi-même un support (et, par suite, un axe); autrement dit, la relation de superposition est *réflexe*. On en tiendra compte dans la recherche des axes et supports communs à divers éléments.

Remarque. — Au sujet de l'hypothèse secondaire, observons qu'il résultera du *postulat de disposition polygonale à caractère projectif* de l'ensemble des points d'une droite (qui sera exposé au Chapitre IV) qu'en supposant l'existence d'un point C extérieur à la droite de deux points A, B (c'est-à-dire en supposant que la Géométrie ne soit pas limitée au domaine binaire), il suffit de postuler dans le plan ternaire ABC l'existence d'un quatrième point D extérieur à

chacune des droites AB, BC, CA, pour en déduire l'existence, sur la droite AB, d'une infinité de points formant un ensemble polygonalement ordonné (*voir* Chap. III, sur la Disposition polygonale), dense en soi et correspondant biunivoquement à l'ensemble des nombres rationnels (Chap. X). La proposition qu'énonce l'hypothèse secondaire devient alors une simple conséquence de cette propriété (et des hypothèses fondamentales).

6. Les propriétés intrinsèques des systèmes de points reposant sur une même droite (ou, comme on dit, de points *alignés*) résultent de celles des éléments reposant sur un même plan ternaire supportant la droite, les points de cette droite étant considérés comme *traces* de droites du plan, c'est-à-dire étant supposés reposer sur des droites du plan (en vertu de la troisième hypothèse fondamentale, il y a toujours un point reposant simultanément sur la droite donnée et sur une droite arbitraire reposant sur un plan ternaire qui supporte la première).

Si la Géométrie se bornait au domaine binaire, c'est-à-dire si les points de l'ensemble fondamental étaient supposés reposer sur une seule et même droite, sans qu'ils fussent reliés par des relations de superposition avec d'autres éléments, *les hypothèses précédentes seraient impuissantes à engendrer des développements ultérieurs.*

La Géométrie du domaine binaire suppose donc essentiellement que celui-ci repose sur un domaine ternaire; elle est d'ailleurs, ainsi qu'on le verra, indépendante du support ternaire auxiliaire envisagé.

Dans le domaine ternaire, l'une des deux propositions fondamentales d'alignement, ou théorème de *Desargues*, ne peut se déduire des hypothèses fondamentales qu'en supposant ce domaine rattaché par une relation de superposition à un domaine quaternaire.

Si donc l'on veut établir la Géométrie du domaine ternaire *sans sortir de ce domaine*, il devient nécessaire de poser en nouveau postulat la proposition de Desargues.

(La seconde proposition d'alignement, ou proposition de *Pappus*, ne peut se déduire des hypothèses fondamentales *quelle que soit la polynarité du domaine envisagé.* On l'énoncera ultérieurement

comme un postulat soit du domaine ternaire, soit du *champ réglé* à support quaternaire.)

7. Nous avons vu que n points distincts ont toujours un support commun de polynarité minimé k au plus égale à n, pouvant toujours être déterminé comme support de k points convenablement choisis dans leur n-uple, et formant une configuration caractéristique k-aire.

Un ensemble fini d'éléments de polynarités diverses P_1^x, P_2^y, P_3^z, ... admet aussi un support minimé unique; car chacun d'eux pouvant être respectivement défini par un système de x, y, z, ... points, le support cherché est le support minimé des points distincts de l'ensemble de ces points.

Le support minimé commun à deux ou à plusieurs éléments donnés s'appellera l'*élément* (ou *plan*) *de jonction* de ces éléments.

Tout plan de support commun à divers éléments est un support de leur support minimé.

Un élément reposant simultanément sur deux éléments donnés est un *axe commun* à ces deux éléments. Deux éléments P_x^m, P_y^n peuvent n'avoir aucun élément commun : chacun d'eux est dit alors *complètement extérieur* à l'autre; nous dirons par convention dans ce cas que leur *axe maximé commun* a une polynarité *nulle* ([3]).

Si deux éléments ont deux axes communs distincts P_1^x, P_2^y, ils ont aussi pour axe commun le support minimé commun à P_1^x et à P_2^y.

On arrive comme précédemment à un axe commun de polynarité maximé *unique*, de polynarité inférieure ou au plus égale à celle de celui des deux éléments de moindre polynarité, *axe supportant tout axe commun aux deux éléments.*

L'axe commun maximé de deux éléments s'appellera l'*élément* ou *plan d'intersection* de ces éléments.

8. Théorème I. — *Si deux plans* P^m, P^n *ont un axe commun* P^k *de polynarité* k, *leur plan de jonction a une polynarité au plus égale à* $m + n - k$.

([3]) On voit ici l'une des raisons qui nous ont fait choisir, pour caractériser l'espèce d'un élément, le nombre que nous avons appelé sa *polynarité*, supérieur d'une unité à ce que l'on appelle d'habitude le *nombre de dimensions* de cet élément. Dans notre système, le caractère de l'intersection de deux éléments, même complètement extérieurs l'un à l'autre, est toujours représenté par un entier positif ou nul.

Car chaque plan P^m ou P^n peut être défini par k points reposant sur P^k, et $(m-k)$, $(n-k)$ autres points respectivement; et le support minimé de ces $(m+n-k)$ points a une polynarité au plus égale à $m+n-k$.

Théorème II (Réciproque de I). — *Si deux plans* P^m, P^n *ont un support commun* P^{m+n-k}, *de polynarité* $m+n-k$, *leur élément d'intersection a une polynarité au moins égale à* k.

Pour $k=1$, si l'un des nombres m ou n est égal à 2, ce théorème se réduit à la troisième hypothèse fondamentale.

Nous plaçant toujours dans le cas de $k=1$, c'est-à-dire, supposant que P^m et P^n *aient un support commun* P^{m+n-1}, *de polynarité* $m+n-1$, admettons ce théorème pour toute valeur de m et jusqu'à la valeur $n'=n-1$ inclusivement.

Considérons une configuration caractéristique n-aire du plan P^n; soit A un sommet arbitraire de cette configuration et P^{n-1} le plan $(n-1)$-aire unique (reposant sur P^n) des $n-1$ autres sommets.

Si A est extérieur à P^m, le plan $(m+1)$-aire (P^m, A) et le plan $(n-1)$-aire P^{n-1}, reposant tous deux sur le plan P^{m+n-1}, support commun de P^m et de P^n, où

$$m+n-1=(m+1)+(n-1)-1,$$

auront au moins un point-axe commun B, distinct de A (puisque A est extérieur à P^{n-1}).

Si le point B est extérieur à P^m, la droite AB et le plan P^m, reposant tous deux sur le plan $(m+1)$-aire (P^m, A), auront un point-axe commun C; mais C, reposant sur AB, repose aussi sur P^n, puisque B est uni à P^{n-1} et que $P^n=(P^{n-1}, A)$.

Donc P^m et P^n ont un point-axe commun C. C. Q. F. D.

Supposons maintenant le théorème établi pour toute valeur de m et de n, et jusqu'à la valeur $k'=k-1$ inclusivement.

Alors P^m et P^n auront un axe commun P^{k-1} de polynarité au moins égale à $k-1$, car reposant sur le plan P^{m+n-k}, ils reposent aussi sur tout plan $P^{m+n-(k-1)}$ supportant le premier.

Formons une configuration caractéristique m-aire de P^m, dont $k-1$ sommets soient une configuration caractéristique de P^{k-1}; les $m-(k-1)$ autres sommets de la configuration m-aire définissent

univoquement un plan $P^{m-(k-1)}$ reposant sur P^m et complètement extérieur à P^{k-1} (c'est-à-dire *sans axe commun* avec ce plan, car s'ils avaient un axe commun, leur support minimé, en vertu du théorème précédent, aurait une polynarité inférieure à m).

Les plans P^n, $P^{m-(k-1)}$, reposant simultanément sur le plan P^{m+n-k} où

$$m+n-k = n+[m-(k-1)]-1,$$

auront un point commun A. Ce point étant extérieur au plan P^{k-1}, le plan P^k qui supporte ces deux éléments, axe commun à P^m et à P^n, a pour polynarité k. C. Q. F. D.

CONCLUSION. — *Entre les polynarités* m, n *de deux éléments, et celles* i, j *de leurs éléments d'intersection et de jonction, on a toujours la relation fondamentale*

$$i+j=m+n$$

(en convenant de dire de deux éléments sans axe commun, c'est-à-dire complètement extérieurs l'un à l'autre, que leur axe maximé commun a une polynarité *nulle*).

Observation. — Dans tout ce qui va suivre, pour vérifier les assertions du texte, concernant les polynarités d'éléments envisagés, le lecteur n'aura qu'à se reporter à la relation fondamentale

$$i+j=m+n.$$

II. — Formes fondamentales géométriques.

1. Axe et support (soutien), éléments constitutifs, espèce d'une forme fondamentale géométrique (indéfinie ou définie); formes axées et anaxes (ou champs), formes centrées (gerbes), formes d'axe binaire (feuillées). — 2. Les deux formes linéaires (*puncti* et *duali*) de soutien donné; cas où il n'y a qu'une telle forme; polynarité intrinsèque d'une forme linéaire. — 3. Énumération des formes de support binaire, ternaire ou quaternaire. — 4. Champ caractéristique ou section d'une forme, et forme projetant un champ; caractère d'une forme définie; formes isogènes, isosimilaires et dualisimilaires : cas de formes linéaires; relation de projectivité entre formes isosimilaires. — 5. Relation de dualité entre formes dualisimilaires; collinéation, projectivité, homographie, dualité, corrélation; équivalences homographiques. — 6. Observation sur le principe de dualité.

1. L'ensemble d'un axe et d'un support d'un même élément fondamental géométrique (axe reposant nécessairement sur le support) constitue un *soutien* de cet élément.

L'ensemble des éléments de polynarités diverses qui admettent un *soutien donné* (polynarités comprises entre celles de l'axe et du support) constitue une *forme fondamentale géométrique indéfinie* [1], qui a pour axe et support (ou pour soutien) l'axe et support donnés (le soutien donné) et pour *éléments constitutifs* les éléments envisagés.

Si a est la polynarité de l'axe, et s celle du support, la forme indéfinie sera dite d'*espèce* (a, s). L'espèce d'une forme indéfinie est donc caractérisée par un couple ordonné d'entiers distincts rangés par ordre de grandeur croissante, et dont le premier (polynarité de l'axe) peut être nul.

En retenant seulement, parmi les éléments constitutifs d'une forme indéfinie (a, s), ceux qui ont une même polynarité donnée e, comprise entre celles de l'axe et du support de la forme, on obtient une *forme fondamentale géométrique définie*, qui a pour axe et support (ou pour *soutien*) l'axe et support donnés, et pour éléments constitutifs les éléments *iso-e-aires* envisagés; elle sera dite d'*espèce* (a, e, s).

L'espèce d'une forme définie est donc caractérisée par un triple ordonné d'entiers *distincts* rangés par ordre de grandeur croissante, et dont le premier (polynarité de l'axe) peut être nul.

On peut distinguer les formes *axées* $(a > 0)$ et les formes *anaxes* $(a = 0)$ (dont les éléments constitutifs n'admettent pas d'axe *à tous commun*) qui s'appelleront des *champs* (définis ou indéfinis).

Un champ *de support binaire* s'appelle une *ponctuelle*.

Si l'axe se réduit à un point $(a = 1)$, il prend le nom de *centre* et la forme s'appelle une « forme centrée » ou *gerbe;* la gerbe de droites, *de support ternaire*, s'appelle une *radiée*. Les formes d'axe binaire $(a = 2)$ sont des *feuillées*.

2. Une forme *définie* sera dite *linéaire*, si *le caractère intrinsèque d'un couple d'éléments constitutifs distincts y demeure invariable;* ou, pour être plus précis, si *les éléments de jonction et d'intersection de deux éléments arbitraires distincts de la forme conservent une polynarité invariable*.

---

[1] Ces termes de « forme indéfinie » ou de « forme définie » n'offrent évidemment aucune analogie avec les expressions identiques usitées en Algèbre.

Ainsi, il y a *deux champs définis linéaires de support n-aire ;* le champ *ponctuel* (deux éléments constitutifs ont toujours pour élément de jonction une droite, et n'ont pas d'élément d'intersection), et le champ d'*éléments* $(n-1)$*-aires* (deux éléments constitutifs ont toujours un élément d'intersection de polynarité $n-2$).

Le premier champ sera dit *punctilinéaire*, et le second, *dualilinéaire*.

Nul autre champ défini de support n-aire, d'espèce $(0, n-k, n)$, formé d'éléments constitutifs de polynarité $(n-k)$, $(1 < k < n-1)$, *n'est linéaire;* car l'intersection de deux éléments y a une polynarité variable, de $(n-2k)$ à $(n-k-1)$. (Ainsi, dans le champ de droites de support quaternaire, ou *espace réglé ordinaire*, deux droites *peuvent ou non* avoir un point d'intersection.)

(Les deux champs définis linéaires *de support binaire* se confondent en un seul, puisqu'ici $n-1=1$, qui s'appelle une *ponctuelle*, laquelle peut donc être envisagée soit comme *punctilinéaire*, soit comme *dualilinéaire*.)

De même, parmi toutes les formes définies de même *soutien* (a, s), il n'y en a que *deux* de *linéaires :* l'une d'*espèce* $(a, a+1, s)$, où la polynarité de l'élément constitutif est supérieure d'une unité à celle de l'axe; l'autre, d'*espèce* $(a, s-1, s)$, où la polynarité de l'élément constitutif est inférieure d'une unité à celle du support.

La première sera dite *punctilinéaire*, et la seconde, *dualilinéaire*.

Si la polynarité du support est supérieure seulement de deux unités à celle de l'axe, les deux formes linéaires attachées à ce soutien se confondent en une seule, d'*espèce* $(a, a+1, a+2)$; c'est d'ailleurs la seule forme définie admettant ce soutien, et on peut l'envisager soit comme punctilinéaire, soit comme dualilinéaire.

On appellera *polynarité intrinsèque* d'une forme *définie linéaire*, la différence $s-a$ des polynarités de son support et de son axe. (La forme linéaire qu'on vient de considérer est une forme *binaire*.)

3. *Énumération des formes de support binaire, ternaire, quaternaire :*

FORME DE SUPPORT BINAIRE :

Forme anaxe..... *Ponctuelle* (0, 1, 2), *punctidualilinéaire binaire.*

FORMES DE SUPPORT TERNAIRE :

Formes anaxes...	*Champ ponctuel* (0, 1, 3), *punctilinéaire ternaire.*
	Champ réglé (0, 2, 3), *dualilinéaire ternaire.*
Forme centrée....	*Radiée* (1, 2, 3), *punctidualilinéaire binaire.*

FORMES DE SUPPORT QUATERNAIRE :

Formes anaxes...	*Champ ponctuel* (0, 1, 4), *punctilinéaire quaternaire.*
	Champ planaire (0, 3, 4), *dualilinéaire quaternaire.*
	Champ réglé (0, 2, 4), *non linéaire.*
Formes centrées...	*Gerbe de droites* (1, 2, 4), *punctilinéaire ternaire*
	Gerbe de plans (1, 3, 4), *dualilinéaire ternaire.*
Forme axée......	*Feuillée* (2, 3, 4), *punctidualilinéaire binaire.*

4. A toute forme définie *axée*, d'espèce (a, e, s), on peut attacher arbitrairement un *champ* défini $(0, e-a, s-a)$, d'éléments $(e-a)$-aires P^{e-a}, dont le support $(s-a)$-aire repose sur le support s-aire de la forme, mais est *complètement extérieur à l'axe a-aire de cette forme.*

Un tel champ s'appellera *champ caractéristique*, ou *section caractéristique* de la forme.

Tout élément constitutif P^{e-a} du champ caractéristique *repose sur* un élément constitutif P^e de la forme, savoir le *plan de jonction* de l'élément P^{e-a} envisagé et de l'axe de la forme. Réciproquement, tout élément P^e de la forme *porte* un élément P^{e-a} du champ, qui est l'*intersection* de cet élément P^e avec le support P^{s-a} du champ.

Nous dirons que la forme *projette par son axe* tout champ caractéristique, et chacun de deux champs caractéristiques (de supports distincts) est dit *la projection* sur son propre support, et par l'axe de la forme, de l'autre champ.

Deux champs, de supports et d'éléments constitutifs isopolynaires, peuvent toujours être considérés chacun comme une projection de l'autre. Il suffit en effet de choisir un axe arbitraire *complètement extérieur* à chacun de ces supports (et dont l'intersection avec le plan de jonction de ces supports ait une polynarité égale à la différence entre la polynarité de ce plan de jonction et la commune polynarité des supports) : la forme qui par cet axe projette l'un des champs, admet l'autre pour champ caractéristique.

Nous appellerons *caractère* d'une forme *définie*, d'espèce (a, e, s), le couple ordonné d'entiers $(e - a, s - a)$, qui sont les polynarités de l'élément constitutif et du support d'un champ caractéristique de cette forme.

Une forme *définie* est linéaire ou non (et *puncti* ou *duali*) en même temps que son champ caractéristique, et la *polynarité intrinsèque* d'une forme *linéaire* n'est autre que celle de ce champ.

Deux formes *définies* (linéaires ou non) *de même espèce* seront dites *isogènes*, et deux formes définies *de même caractère* (dont les champs caractéristiques sont de même espèce) seront dites *isosimilaires.*

En général, on dit que deux éléments fondamentaux géométriques P^x, P^y, sont d'*espèces n-airement corrélatives*, si la somme $x + y$ de leurs polynarités est égale à n.

Deux champs définis, de supports isopolynaires de polynarité n, seront dits *dualisimilaires*, si leurs éléments constitutifs *sont d'espèces n-airement corrélatives*.

Deux formes définies $F(a, e, s)$, $F'(a', e', s')$ seront dites *dualisimilaires*, si leurs champs caractéristiques le sont.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux formes F, F' soient *iso-* ou *duali*-similaires, sont les relations suivantes, entre les coefficients des *espèces* de ces formes :

Isosimilarité :

$$s + a' = s' + a,$$

$$e + a' = e' + a.$$

Dualisimilarité :

$$s + a' = s' + a = e + e'.$$

Dans le cas de dualisimilarité, les sommes des polynarités : de l'axe de chacune et du support de l'autre, ainsi que d'éléments constitutifs de l'une et de l'autre, sont égales. Leur valeur commune sera le *module* de la dualisimilarité.

Deux formes *linéaires* iso- ou duali-similaires sont *isopolynaires ;* et réciproquement deux formes *linéaires isopolynaires* sont ou *isosimilaires* (toutes deux ou *puncti-* ou *duali*-linéaires), ou *dualisimilaires* (l'une *puncti-*, l'autre *duali*-linéaire).

On peut toujours, par une relation *partout* biunivoque ([1]), rapporter terme à terme, les éléments constitutifs de deux formes définies isosimilaires, de telle sorte qu'à des éléments constitutifs de l'une, appartenant à une même forme secondaire reposant sur celle-ci, soient associés des éléments constitutifs de l'autre, appartenant à une même forme secondaire reposant sur cette dernière ([2]), ces deux formes secondaires *étant aussi isosimilaires*.

Une telle relation entre deux formes *isosimilaires* s'appellera une *projectivité*.

Par exemple, deux champs caractéristiques de deux formes isosimilaires étant *de même espèce*, peuvent, ainsi qu'on l'a vu, être considérés comme champs caractéristiques d'une *même troisième forme*. Celle-ci rapporte de la façon indiquée l'un à l'autre les deux champs, et par suite l'une à l'autre les deux formes envisagées.

Si, à partir d'une forme donnée, on fait une suite alternative finie de sections caractéristiques et de projections, chaque projection étant faite par un axe extérieur au support de la section précédente, les deux formes extrêmes sont mises évidemment en relation de projectivité.

Une projectivité entre deux formes définies isosimilaires entraîne aussi une projectivité entre les deux formes définies (isosimilaires) qui ont respectivement mêmes axes et mêmes supports que les premières, mais où les polynarités de leurs éléments constitutifs sont augmentées (ou sont diminuées) d'une unité; ces nouveaux éléments se correspondent, en effet, comme supports (ou comme axes) d'éléments correspondants des premières formes. On voit donc que, de proche en proche, tout couple de formes définies isosimilaires de mêmes axes et supports que les premières et n'en différant que par les polynarités de leurs éléments constitutifs, sont mises en relation de projectivité. Les deux formes indéfinies de mêmes axes et de mêmes supports que les premières sont alors dites aussi rapportées projectivement.

([1]) Nous disons « *partout* » biunivoque, vu que l'on considère aussi des transformations « *en général* » biunivoques. Ainsi, dans le plan ternaire, l'inversion ponctuelle de Steiner est une transformation « *en général* », mais non « *partout* » biunivoque, puisqu'il y a trois points pour chacun desquels le point inverse est indéterminé (sur le côté opposé dans le triangle de ces points).

([2]) Nous disons qu'une forme F_1 *repose sur* une forme F_2, laquelle *supporte* F_1, *si tout élément constitutif de* F_1 *est élément constitutif de* F_2; c'est-à-dire si, *leurs éléments constitutifs étant isopolynaires, le support de* F_1 *repose sur celui de* F_2, *tandis que l'axe de* F_1 *supporte l'axe de* F_2.

Les Géométries intrinsèques de formes isosimilaires sont abstraitement identiques.

5. Supposons que l'on *puisse* rapporter terme à terme les éléments constitutifs de deux formes *dualisimilaires*, de telle sorte qu'à des éléments constitutifs de l'une appartenant à une même forme secondaire reposant sur celle-ci soient associés des éléments constitutifs de l'autre, appartenant à une même forme secondaire reposant sur cette dernière, les deux formes secondaires étant dualisimilaires.

Une telle relation s'appellera une *dualité* entre les deux formes.

Une *dualité* entre deux formes définies dualisimilaires entraîne aussi, comme dans le cas de la projectivité, une dualité entre deux formes dualisimilaires arbitraires, *de mêmes axes et supports que les premières et ne différant de celles-ci que par les polynarités de leurs éléments constitutifs* (car les éléments constitutifs de deux telles formes peuvent s'obtenir de proche en proche à partir des premières comme axe et support correspondants d'éléments correspondants de deux formes précédentes). Les formes non définies de mêmes axes et supports sont alors dites aussi en relation de dualité.

On peut donc, pour la projectivité comme pour la dualité, se contenter d'envisager des formes *isopolynaires linéaires*, soit toutes deux *puncti* ou toutes deux *duali* (projectivité), soit l'une *puncti* et l'autre *duali* (dualité).

(Nous n'envisagerons pas, entre formes définies similaires *non linéaires*, des relations dont le caractère, outre d'être partout biunivoque, serait défini par des conditions n'entraînant pas, *par la seule vertu des hypothèses fondamentales d'appartenance, une collinéation univoquement déterminée entre formes linéaires de même soutien que les premières*. Telle est, par exemple, une relation entre droites constitutives de deux champs réglés quaternaires, dont le caractère satisfasse aux deux seules conditions : 1° qu'elle soit partout biunivoque ; 2° qu'à deux droites *incidentes* d'un champ soient toujours associées deux droites *incidentes* de l'autre, conditions auxquelles satisfont soit la projectivité, soit la dualité.)

Si deux formes isosimilaires sont en outre de même espèce (*isogènes*), une relation de projectivité entre ces formes s'appellera une relation d'*homographie*.

Si le module de dualisimilarité de deux formes dualisimilaires est

égal à la polynarité du *plan de jonction des supports de ces formes*, une dualité entre ces formes s'appellera une *corrélation*.

Dans ces cas, on peut transformer terme à terme l'une de ces formes dans l'autre par une transformation *homographique* (1er cas) ou *corrélative* (2e cas), *affectant d'une façon partout biunivoque, et sans en altérer l'ensemble, tous les éléments du plan de jonction des supports de ces deux formes.*

Les relations de projectivité et de dualité entre formes offrent un caractère commun qui permet de les envisager comme deux modes d'une même relation, dite *collinéation*, laquelle se définira :

Une relation partout biunivoque entre les éléments constitutifs de deux formes linéaires isopolynaires, telle qu'à des éléments de l'une constituant une même forme binaire reposant sur celle-ci, soient associées dans l'autre des éléments constituant une même forme binaire reposant sur cette dernière.

Les termes de *projectivité*, *homographie*, *collinéation* ont été introduits respectivement par les géomètres *Poncelet*, *Chasles*, *Möbius*, et indifféremment employés comme synonymes ; les termes de *dualité* et de *corrélation* sont aussi employés comme synonymes.

Nous avons introduit entre ces termes les petites différences indiquées ci-dessus, et que résume le Tableau suivant :

Collinéation...	Définition ci-dessus.
Projectivité....	Collinéation entre formes isosimilaires.
Homographie..	Projectivité entre formes isogènes.
Dualité........	Collinéation entre formes dualisimilaires.
Corrélation....	Dualité entre deux formes dualisimilaires, dont les supports ont un plan de jonction de polynarité égale au *module* de la dualisimilarité.

(*Exemple :* Deux gerbes *de même support quaternaire*, l'une de *droites*, l'autre de *plans ternaires*, peuvent être mises en relation de *dualité*, non de *corrélation ;* si leurs supports quaternaires supposés *distincts* reposent sur un même plan *quinquennaire*, on a une *corrélation*, les éléments de l'une des formes pouvant être transformés dans leurs associés de l'autre forme par une même *transformation corrélative*, affectant, sans en altérer l'ensemble, tous les

éléments du champ indéfini qui a pour support le plan quinquennaire envisagé.)

Les relations de collinéation, de projectivité, d'homographie sont *transitives*, non celle de *dualité* (sauf cas de formes binaires), deux formes en relation de dualité avec une même troisième étant elles-mêmes en relation de *projectivité*.

Nous représenterons la relation de *collinéation* par le symbole $\boxminus$, affectant la forme d'un H (initiale de Homographie) horizontal, et dont la ressemblance avec le symbole de l'égalité rappelle le *caractère équivalentaire* de la relation.

Une *équivalence collinéaire* entre deux n-uples ordonnés dont les éléments sont ou des constitutifs, ou des formes secondaires similaires de deux formes similaires (*iso-* ou *duali-*) F, F′, soit

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \boxminus (A'_1, A'_2, \ldots, A'_n),$$

signifie donc que les éléments de même rang de ces deux n-uples peuvent être associés dans une même collinéation entre les deux formes F et F′.

La collinéation étant une relation *équivalentaire*, les systèmes d'éléments collinéairement équivalents à un système donné, et par suite chacun à chaque autre, ont *un caractère abstrait commun* qui s'appellera leur *caractère projectif*.

Les deux principales propriétés de l'équivalence collinéaire sont les suivantes, qui seront établies en temps et lieu :

1° Entre *quadruples ordonnés* d'éléments de formes *binaires*, l'équivalence collinéaire

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) \boxminus (B_1, B_2, B_3, B_4)$$

entraîne l'équivalence

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) \boxminus (B_2, B_1, B_4, B_3).$$

En particulier, entre *quatre mêmes éléments* A_1, A_2, A_3, A_4 d'une forme *binaire*, on a

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) \boxminus (A_2, A_1, A_4, A_3),$$

équivalence qui se traduit ainsi :

Le caractère projectif d'un quadruple ordonné d'éléments

d'une même forme binaire demeure inaltéré si l'on y permute deux éléments et en même temps les deux autres.

2° $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ étant les n sommets d'une configuration caractéristique n-aire, et A, B, A′, B′ quatre points de leur support, l'équivalence

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, A, B) \rightleftarrows (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, A', B')$$

entraîne l'équivalence

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, A, A') \rightleftarrows (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, B, B').$$

6. Nous avons *admis* la *possibilité* de la relation de *dualité*.

Cette possibilité ne peut être immédiatement mise en évidence, comme il l'a été fait pour la *projectivité*. Il faut, pour construire effectivement une dualité, recourir au postulat déjà mentionné de *Pappus*.

Avant de terminer les généralités sur les collinéations, nous aurons donc à présenter ce postulat, et nous placerons à ce moment l'énumération des autres postulats; mais nous parlerons d'abord du *théorème fondamental de Desargues*, qui constitue, avec le postulat en question de *Pappus*, *les deux propositions fondamentales d'alignement*, dont l'exposé fait l'objet des deux paragraphes suivants.

Avant d'aborder ce sujet, nous avons une observation à présenter, concernant ce que l'on appelle le *principe de dualité*.

Les *relations descriptives* comprennent les relations de superposition, et les relations dites *d'incidence*, en vertu desquelles *la polynarité de l'élément de jonction ou d'intersection d'éléments fondamentaux géométriques donnés est soumise à des conditions données* (par exemple, à la condition d'avoir une valeur donnée), compatibles, pour toute paire d'éléments, avec la relation capitale

$$i + j = m + n.$$

On appelle « *propositions descriptives* » celles en vertu desquelles les éléments d'un ensemble donné entre lesquels existent certaines *relations descriptives*, ou d'un ensemble lié à celui-ci par des relations descriptives, satisfont également à d'autres *relations descriptives*. Il faut entendre dans le même sens le terme de « *propriétés descriptives* » ou « *propriétés projectives* » (qui ne sont pas altérées

par les projectivités homographiques, transformant tout élément en un élément de même espèce).

Nous avons appelé « éléments *d'espèces n-airement corrélatives* » deux éléments dont les polynarités ont leur somme égale à n.

Une *relation descriptive* entre des éléments fondamentaux aura, pour *relation n-airement corrélative*, une relation descriptive entre éléments d'espèces n-airement corrélatives de celles des premiers, et dans l'énoncé de laquelle *superpositions* et *infrapositions sont réciproquement remplacées les unes par les autres* (les termes de *support* et d'*axe* s'échangent réciproquement ; en particulier, les termes d'*élément de jonction* et d'*élément d'intersection*).

Une « *proposition descriptive* », concernant un ensemble E d'éléments fondamentaux liés par un ensemble R_1 de relations descriptives, et en déduisant un nouvel ensemble R_2 de relations descriptives, aura, pour *n-airement corrélative*, une proposition concernant un ensemble E' d'éléments d'espèces corrélatives de celles des éléments de E, liés par un ensemble R'_1 de relations corrélatives de celles de R_1, et en déduisant un ensemble R'_2 de relations corrélatives de celles de R_2.

Le principe de *dualité* ou de *corrélation* (ces termes n'ont pas ici le même sens *particulier* que précédemment) consiste en ce que « *toute proposition descriptive concernant un ensemble d'éléments reposant sur un même support n-aire entraîne nécessairement le théorème n-airement corrélatif* ».

Ce principe résulte simplement de ce que, dans le plan n-aire, *les hypothèses fondamentales de superposition contiennent les propositions n-airement corrélatives* [1].

Ainsi, dans le plan *n-aire*, deux plans de polynarités x, y, où

$$x + y = n + i,$$

ont un élément d'intersection de polynarité au moins égale à i, et deux plans d'espèces corrélatives de celles des premiers, c'est-à-dire de polynarités $n - x$, $n - y$, ont un élément de jonction de polyna-

---

[1] Cette proposition que les hypothèses fondamentales d'appartenance contiennent les propositions *n-airement corrélatives*, peut être adoptée comme postulat, au lieu et place de la troisième hypothèse fondamentale, relative à l'intersection d'une droite et d'un plan $(n - 1)$-aire reposant sur un même plan n-aire. La troisième hypothèse devient alors une conséquence des deux premières et du postulat.

rité au plus égale à

$$j' = (n - x) + (n - y) = n - i.$$

On voit que

$$i + j' = n.$$

On a souvent fait dépendre le principe de dualité *d'une relation de dualité* (au sens particulier des pages précédentes) *susceptible d'être établie* entre champs linéaires isopolynaires dualisimilaires, et notamment de la transformation *par polaires réciproques*.

Or, une telle relation de dualité ne peut être effectivement construite que grâce au postulat de Pappus (et pour ce qui concerne la correspondance par polaires réciproques dans le plan ternaire, qu'on la dérive des propriétés de l'involution ou de celles de la conique, les propriétés capitales de l'involution, et la propriété caractéristique de la conique de ne pouvoir contenir trois points alignés, ne peuvent se déduire des hypothèses fondamentales qu'à l'aide de ce postulat).

En se plaçant à ce point de vue, on serait donc tenté de croire que le *principe de dualité* ne s'applique pas à la *Géométrie non pappusienne*, alors qu'*il n'en est rien*.

Comment se fait-il alors, dira-t-on, que l'on puisse établir, *en vertu des seules hypothèses fondamentales*, des collinéations entre formes *isosimilaires*, mais non entre formes *dualisimilaires?*

C'est que ces deux sortes de collinéations, *projectivité* et *dualite*, ne sont nullement *corrélatives* (au sens général) l'une de l'autre : chacune d'elles est à soi-même sa propre corrélative.

Car dans le principe de dualité, à une forme correspond une forme *dualisimilaire*, et à une collinéation entre deux formes isosimilaires (*projectivité*) une collinéation entre deux formes isosimilaires (*simultanément dualisimilaires des premières*).

III. — La première proposition fondamentale d'alignement.

1. Configuration caractéristique. — 2. Configuration surabondante. — 3. Théorème fondamental de Desargues et généralisation. — 4. Application aux ponctuelles. — 5. Figure fondamentale homologique et notation de ses éléments.

1. Nous appelons « *configuration caractéristique n-aire* » (*triangle* du plan ternaire, *tétraèdre* du plan quaternaire) l'ensemble de n points (*sommets*) déterminant effectivement un plan n-aire

(c'est-à-dire ne reposant simultanément sur nul plan de polynarité inférieure à n), et des plans de polynarités diverses (de 2 à $n-1$), qui sont les éléments de jonction de ces sommets 2 à 2, 3 à 3, ..., $n-1$ à $n-1$.

Comme on l'a déjà vu (§ I, 4), p sommets d'une configuration n-aire sont les sommets d'une configuration caractéristique p-aire.

Les éléments de jonction des n sommets comprennent C_n^2 *droites*, C_n^3 *plans ternaires*, et en général C_n^k *plans k-aires*.

Les $C_n^{n-1} = n$ plans $(n-1)$-aires sont dits les *bases* de la configuration. A chaque sommet est dite *opposée* une base, plan de jonction des $n-1$ autres sommets.

Un plan de jonction de polynarité k est une *arête k-aire*.

A chaque arête k-aire est dite *opposée* une arête $(n-k)$-aire, élément de jonction des $n-k$ sommets extérieurs à la première. Toute arête k-aire contient C_k^p arêtes p-aires $(1 \leqq p \leqq k)$, et est contenue dans C_{n-k}^{m-k} arêtes m-aires.

Une telle configuration est aussi bien déterminée par l'ensemble de n plans $(n-1)$-aires qui en sont les bases (qui n'aient aucun point à tous commun), et des éléments de polynarités diverses (de $n-2$ à 1) qui sont leurs éléments d'intersection 2 à 2, 3 à 3, ..., $n-1$ à $n-1$.

2. Une configuration *surabondante propre* d'un plan n-aire est formée de l'ensemble de $n+1$ points de ce plan, dont n quelconques ne reposent pas simultanément sur un plan de polynarité inférieure à n, et de leurs divers plans de jonction 2 à 2, ..., $n-1$ à $n-1$.

Une configuration surabondante *corrélative* de ce plan n-aire sera formée de $n+1$ plans $(n-1)$-aires, tels que n quelconques d'entre eux n'aient aucun point à tous commun, et de leurs divers éléments d'intersection 2 à 2, ..., $n-1$ à $n-1$.

On peut remarquer qu'une configuration *caractéristique* d'un plan n-aire ne détermine pas de nouvel élément de ce plan. Autrement dit, l'intersection de deux arêtes de la configuration (quand elles en ont une) en est encore une arête ou un sommet, et leur plan de jonction est aussi une arête (ou le plan de support de la configuration, s'il s'agit de deux arêtes opposées).

Soient en effet une arête m-aire et une arête p-aire, ayant en commun k sommets de la configuration. Leur plan de jonction est l'arête portant les $m+p-k$ sommets supportés par les deux pre-

mières, et sa polynarité ne saurait être inférieure à $m+p-k$ (§ I, 4). Les deux arêtes de polynarités m et p ont donc pour intersection un plan de polynarité k, puisque

$$(m)+(p)-(m+p-k)=k,$$

qui se confond avec l'arête de jonction de leurs k sommets communs.

Il n'en est plus de même pour la configuration *surabondante*.

Une arête k-aire, par exemple, et l'arête $(n+1-k)$-aire comprenant les $(n+1-k)$ sommets extérieurs à la première, reposant toutes deux sur le plan n-aire donné, où

$$n=k+(n+1-k)-1,$$

ont un point commun qui n'est pas un sommet de la configuration.

Les points ainsi déterminés en déterminent d'autres, et ainsi de suite, l'ensemble ainsi formé étant illimité (comme cela résultera du postulat du quadrangle et du postulat de la disposition polygonale projective de l'ensemble des points d'une droite).

Comme on le verra dans un Chapitre ultérieur (Chap. X), cet ensemble, dénommé *réseau n-aire de Mobius*, est aussi bien déterminé par $n+1$ quelconques de ses points formant une configuration surabondante.

On dit aussi que cet ensemble est *l'ensemble rationnel* attaché à l'une quelconque de ses configurations surabondantes.

Si, détachant de la configuration choisie (dite *de référence*) une configuration caractéristique (dite *fondamentale*), l'on affecte chacun des sommets de cette dernière d'un *n-uple ordonné d'entiers* dont $n-1$ sont *nuls* (la position de l'entier non nul variant pour chacun de ces sommets), et le sommet délaissé, dénommé *point-unité*, d'un *n-uple d'entiers égaux*, on pourra établir (en s'appuyant sur les postulats énoncés) une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble en question et l'ensemble des *n-uples ordonnés* d'entiers proportionnels à des entiers fixes, ou *ensemble des $(n-1)$-uples ordonnés de nombres rationnels*.

Il résultera des postulats de *continuité* de la droite (d'Archimède et de Cantor) que cet ensemble rationnel, naturellement *partout dense en soi*, est aussi *partout dense dans le plan n-aire qui le supporte* (ce qui veut dire que chacune des 2^{n-1} *régions* en lesquelles est *séparé* un champ n-aire par les n *bases* d'une configuration

caractéristique, bases appartenant ou non à l'ensemble précédent, contient des points de cet ensemble); et que tout point du champ n-aire est un *point-limite* pour cet ensemble (ce qui veut dire qu'à tout point arbitrairement choisi dans ce champ n-aire, et appartenant ou non à l'ensemble, l'on pourra associer une *suite discrète* de régions n-aédriques, dont les sommets appartiennent tous à l'ensemble considéré, chacune étant *intérieure* à la précédente, pour chacune desquelles le point envisagé soit un point intérieur, telles que tout point arbitraire du champ distinct du point envisagé soit extérieur à l'une des régions de la suite, et par conséquent aux régions postérieures).

Réciproquement (Cantor) *tout élément limite d'un réseau de Mobius est un point de son support n-aire.* (Autrement dit, si l'on considère une suite *emboîtée* de régions n-aédriques dont les sommets appartiennent au réseau, telle que, pour toute paire de points arbitrairement choisis dans leur support n-aire, l'un au moins soit toujours extérieur à l'une des régions de la suite et par conséquent à toute région postérieure, il y aura *un point* du champ n-aire intérieur à toutes les régions de la suite.)

Ces postulats permettront donc d'établir une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des points d'un champ ponctuel n-aire, et l'ensemble *des n-uples ordonnés de nombres réels* (fixés à un facteur de proportionnalité près), ou *continu analytique à* $n-1$ *dimensions* (*voir* Chap. X.)

La trace d'une configuration caractéristique d'un plan n-aire sur un plan $(n-1)$-aire reposant sur le premier, est l'ensemble des *axes communs* à ce plan $(n-1)$-aire et aux arêtes d'espèces diverses de la configuration.

Si le plan $(n-1)$-aire envisagé ne porte aucun sommet de la configuration, la trace de celle-ci est une configuration *surabondante corrélative* du plan $(n-1)$-aire, déterminée par les n plans *iso-*$(n-2)$*-aires* d'intersection de ce plan $(n-1)$-aire avec les n bases de la première configuration.

3. Si deux configurations caractéristiques n-aires de sommets distincts ont leurs sommets deux à deux (un sommet de l'une et un sommet de l'autre) alignés avec un même point fixe extérieur aux $2n$ bases de ces configurations, le *plan de jonction* de deux arêtes *homo-*

logues [1] *k-aires* est le plan $(k+1)$-aire qui supporte le point fixe et l'une de ces arêtes.

Il en résulte que *deux arêtes homologues k-aires ont toujours une intersection de polynarité* $k-1$.

Deux cas sont à considérer :

1° Les supports n-aires des deux configurations sont *distincts*, mais *reposent nécessairement en même temps que le point fixe* (extérieur à chacun d'eux) *sur un même plan* $(n+1)$-*aire* (déterminé par l'un d'eux et le point fixe).

Les deux configurations sont alors dites *perspectives*, et le point fixe est *leur centre de perspective*.

Il est bien évident, dans ce cas, que les n intersections $(n-2)$-aires des paires de bases homologues, et plus généralement les diverses intersections $(k-1)$-aires des paires d'arêtes homologues k-aires, reposent sur un même plan $(n-1)$-aire, intersection des plans n-aires de support des deux configurations.

Réciproquement, si deux configurations caractéristiques ont leurs supports *distincts et d'incidence maximée*, c'est-à-dire ayant pour intersection un plan $(n-1)$-aire et pour plan de jonction un plan $(n+1)$-aire, et si n paires distinctes de bases distinctes de ces configurations (une base de l'une et une base *associée* de l'autre, dites *bases homologues*) ont leurs n intersections $(n-2)$-aires reposant simultanément sur le plan $(n-1)$-aire d'intersection des supports (autrement dit, si les *traces* sur ce plan des deux configurations se confondent), ces configurations sont *perspectives*, les plans de jonction de paires d'arêtes homologues (arêtes provenant de l'intersection des bases de deux groupes de bases homologues) et en particulier les droites de jonction des couples de sommets homologues, *concourant* dans le plan $(n+1)$-aire de jonction des supports, *au point de concours des n plans n-aires qui joignent deux à deux les bases associées des deux configurations*.

2° Les deux configurations *reposent sur le même support n-aire*, le centre d'alignement (extérieur aux bases) des couples de sommets homologues reposant alors nécessairement sur ce support.

---

[1] Un sommet d'une configuration et un sommet de l'autre étant dits *homologues* quand ils sont alignés avec le point fixe, les arêtes *homologues* sont déterminées par deux groupes de sommets homologues.

Le *théorème de Desargues*, étendu au plan n-aire (le théorème original n'envisage que le cas du plan ternaire, et constitue la *première proposition fondamentale d'alignement*), consiste en ce que dans ce cas, tout comme dans le précédent, *les n intersections* $(n-2)$*-aires des paires de bases homologues, et plus généralement les diverses intersections* $(k-1)$*-aires des paires d'arêtes homologues k-aires, reposent sur un même plan* $(n-1)$*-aire*, sur lequel par conséquent les *traces* des deux configurations se confondent.

Les deux configurations sont alors dites *homologiques*, le point fixe et le plan $(n-1)$-aire trouvé étant leur *centre* et leur *plan d'homologie*. On peut donner une démonstration où n'intervienne aucun élément extérieur au plan n-aire de support des configurations, mais à cette démonstration échappe justement le cas de $n = 3$, qui est le cas envisagé dans le théorème original.

Il suffit d'établir que les C_n^2 points d'intersection des *droites-arêtes* homologues reposent sur un même plan $(n-1)$-aire, car les intersections des divers couples de plans-arêtes k-aires homologues ne sont autres que les divers plans de jonction de groupes de C_n^k de ces points (convenablement choisis).

Or, partageons l'ensemble des droites-arêtes de l'une des configurations en deux groupes : celles qui portent un sommet déterminé, et celles qui, n'étant pas unies à ce sommet, reposent sur *la base opposée*.

Les droites-arêtes de ce *dernier* groupe ont leurs intersections avec leurs homologues *de l'autre configuration* sur un même plan $(n-2)$-aire, intersection *de la base* $(n-1)$*-aire qui les porte et de la base homologue*.

Deux droites-arêtes du premier groupe déterminent *dans leur configuration* une arête *ternaire*, portant *une droite-arête du second groupe*, et les intersections de ces trois droites-arêtes avec leurs homologues *de l'autre configuration* reposent *sur une même droite*, *intersection du plan de l'arête ternaire qui les contient et du plan de l'arête homologue*.

Deux points d'intersection quelconques provenant des premiers groupes étant donc toujours alignés avec un point provenant des seconds groupes, *le plan* $(n-1)$*-aire défini par le plan de jonction de ces derniers* (lequel, intersection de deux bases des configurations, a pour polynarité $n-2$) *et un point arbitraire des premiers, les contient tous*.

Réciproquement, si deux configurations caractéristiques *de même support n-aire* ont leurs traces confondues sur un même plan $(n-1)$-aire non uni à nul de leurs sommets et reposant sur leur support commun, ces configurations sont *homologiques* (les plans de jonction des couples d'arêtes homologues k-aires déterminées par deux groupes de $n-k$ bases homologues, et en particulier *les droites de jonction de sommets homologues*, concourant en un même point).

La démonstration, conformément au *principe de dualité*, peut être calquée sur la précédente ; il suffit de permuter les termes : *jonction* et *intersection* ; *axe k-aire* et *support* $(n-k)$*-aire* [en particulier *bases* et *sommets* ; *arêtes* $(n-2)$*-aires* et *droites-arêtes*].

On voit que ces démonstrations supposent dans les configurations l'existence *d'arêtes ternaires qui ne comprennent pas toute la configuration;* elles ne s'appliquent donc pas au cas de $n=3$, et *si la Géométrie se limitait au domaine ternaire, il faudrait y ériger en postulat le théorème fondamental de Desargues.*

La marche à suivre quand les deux configurations ont le même support, *et pour le cas de* $n=3$, méthode que nous allons exposer pour le cas général, consiste à envisager *une troisième configuration simultanément perspective aux deux premières*, dont le support, distinct du support commun de celles-ci, repose par conséquent simultanément avec lui sur un même plan $(n+1)$-aire.

Soient O_1, O_2, deux points extérieurs au plan n-aire de support des deux configurations, mais en ligne droite avec le centre d'alignement O des couples de leurs sommets homologues, *et reposant par conséquent simultanément avec le support n-aire de celles-ci sur un même plan* $(n+1)$*-aire.*

S_1 et S_2 étant deux sommets homologues des configurations (1), (2), les droites $O_1 S_1$ et $O_2 S_2$ reposent sur un même plan ternaire, puisque $O_1 O_2$ et $S_1 S_2$ concourent en O. Elles concourent donc en un point S, et l'ensemble des points (S) forme une configuration *caractéristique* [1] n-aire *simultanément perspective aux deux premières* (suivant les centres respectifs O_1 et O_2).

---

[1] Les n points (S) étant distincts, par exemple, du point O_1 et des n points (S_1), *leur plan de jonction ne saurait avoir une polynarité inférieure à* n, puisque le plan *de polynarité immédiatement supérieure*, qui unit ces points et le point O_1, contenant aussi les n points (S_1), est le plan $(n+1)$-aire de support de la configuration *caractéristique* $(n+1)$*-aire* formée du point O_1 et des n points (S_1).

Les intersections de paires d'éléments homologues des premières reposent donc sur un même plan $(n-1)$-aire, intersection de leur plan n-aire de support et du plan n-aire de la configuration simultanément perspective.

Réciproquement, soient F_1, F_2, deux configurations caractéristiques n-aires de même support S^n, dont les *traces* soient confondues sur un même plan $(n-1)$-aire ne contenant aucun sommet de ces configurations *et reposant sur leur support* [traces formées, comme on l'a vu antérieurement, de n plans $(n-2)$-aires].

Considérons un second plan n-aire distinct du premier, *qui ait aussi pour axe le plan* $(n-1)$-*aire envisagé et qui repose donc simultanément avec le premier support n-aire sur un même plan* $(n+1)$-*aire;* et dans ce second plan n-aire, soient n plans $(n-1)$-aires n'ayant nul point à tous commun, et qui aient chacun pour axe l'une des traces $(n-2)$-aires commune à deux bases homologues des deux configurations.

La configuration caractéristique n-aire de ces n plans ayant sa trace sur le premier plan $(n-1)$-aire confondue avec la trace commune des premières, *est perspective*, ainsi qu'on l'a déjà vu (1), *à chacune des deux autres.*

Si O_1, O_2 sont les centres respectifs de ces perspectives, les plans de jonction des triples d'arêtes homologues k-aires des trois configurations sont des plans $(k+2)$-aires unis à ces centres O_1, O_2; et les plans de jonction des divers couples d'arêtes homologues k-aires des deux premières configurations (en particulier les droites de jonction des couples de sommets homologues), *traces, sur le support* S^n, *des plans* $(k+2)$-*aires précédents, sont unis à la trace* O *sur ce support de la droite qui joint les centres* O_1, O_2, *de perspective.* Les deux configurations données sont donc *homologiques* suivant le centre O.

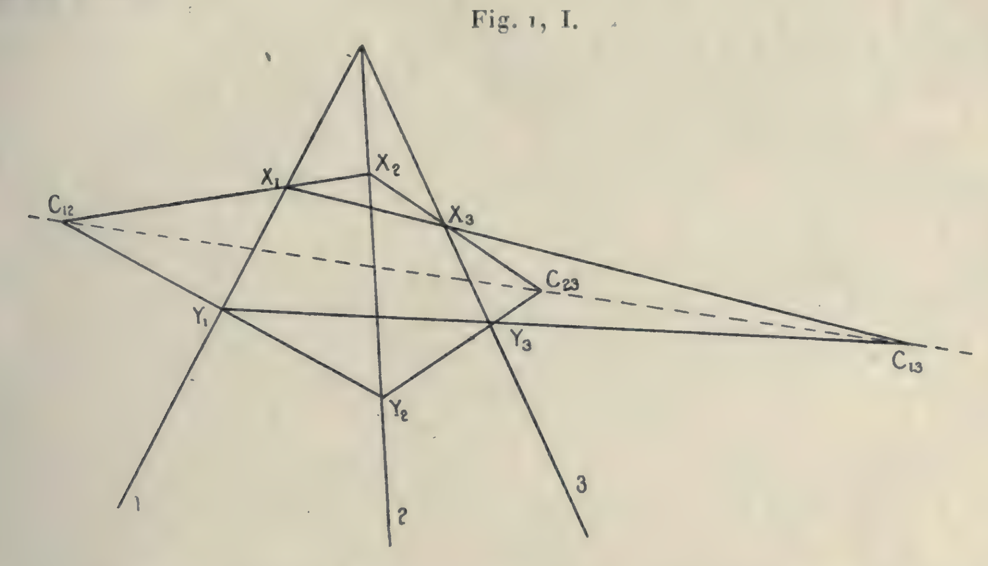
4. De la propriété caractéristique de deux triangles *de même support* ou *de supports distincts*, qui ont leurs sommets deux à deux alignés, résulte pour les *ponctuelles*, cette importante proposition :

Deux ponctuelles, de supports distincts, rapportées perspectivement à une même troisième, sont rapportées perspectivement l'une à l'autre, si les supports de ces trois ponctuelles sont concourants (qu'ils reposent ou non sur un même plan ternaire) *et les*

trois centres de perspective des trois ponctuelles prises deux à deux sont alignés.

Soient 1, 2, 3, les supports concourants des trois ponctuelles (*fig.* 1, I), et C_{13}, C_{23}, les centres respectifs de perspective de 1 et 3, et de 2 et 3.

Fig. 1, I.



Deux triples de points homologues de ces ponctuelles, (X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3), (les points d'un triple ne peuvent être alignés que dans le cas unique où ils reposent sur la droite de jonction $C_{13}C_{23}$ des centres, et confondus qu'au point de concours des trois supports) formant deux *triangles* dont les sommets reposent sur les trois droites concourantes 1, 2, 3, tandis qu'ils ont chacun un côté uni à C_{13}, et un côté uni à C_{23} (ils n'ont d'ailleurs, s'ils sont distincts, ni sommet ni côté commun), le point de concours C_{12} de leurs troisièmes côtés X_1X_2, Y_1Y_2, est aligné avec C_{13} et C_{23}.

La trace C_{12} sur $C_{13}C_{23}$ de la droite qui joint deux points homologues des ponctuelles 1, 2, est donc fixe, et ces deux ponctuelles sont perspectives par le centre C_{12}. C. Q. F. D.

5. Nous appellerons *configuration homologique fondamentale* du plan n-aire, *l'ensemble* de deux configurations caractéristiques homologiques de ce plan n-aire; de leur centre et de leur plan d'homologie; des plans de jonction (concourant au centre) et d'intersection (reposant sur le plan d'homologie) de leurs éléments homologues.

La seconde démonstration que l'on a donnée du théorème généralisé de Desargues, montre clairement que la configuration homologique fondamentale du plan n-aire n'est autre chose que la *trace*, sur ce plan n-aire, *d'une configuration surabondante propre* d'un plan $(n+1)$-aire supportant le premier, configuration constituée (se reporter à la démonstration citée) par la troisième configuration caractéristique auxiliaire n-aire perspective aux deux premières et ses deux centres respectifs de perspective avec chacune d'elles.

Les éléments isopolynaires de la figure homologique fondamentale s'y trouvent donc symétriquement répartis; en particulier, l'un quelconque de ses points peut toujours être considéré comme centre d'une homologie univoquement déterminée de deux configurations caractéristiques n-aires de la figure, les autres éléments de la figure non unis au point envisagé reposant alors sur un même de ses plans $(n-1)$-aires, univoquement déterminé comme plan de cette homologie.

Chacun des C^2_{n+2} points de la figure homologique, et le plan $(n-1)$-aire qui lui est univoquement attaché comme plan d'homologie de celle des C^2_{n+2} homologies qui a ce point pour centre, sont, comme on le verra, éléments correspondants d'une même *dualité involutive*, ou *réciprocité polaire*, affectant tout le champ indéfini du support de la figure.

Les figures homologiques *binaire* (trace sur une droite de l'ensemble des droites de jonction de quatre points d'un même plan ternaire supportant la droite, tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés) et *ternaire* (trace sur un plan ternaire de l'ensemble des droites et plans ternaires de jonction de cinq points extérieurs à ce plan, reposant sur un même plan quaternaire supportant ce plan, et tels que quatre quelconques d'entre eux ne reposent pas sur un même plan ternaire) s'appelleront *figures polaires* (*binaire* et *ternaire*) parce que, réciproquement à ce qu'on vient de dire, *et pour les cas de $n=2$ et de $n=3$*, deux configurations caractéristiques polaires réciproques sont homologiques.

En mémoire de l'origine de la figure homologique, et pour mettre en évidence la disposition de ses éléments, on peut affecter chacun de ses C^2_{n+2} points de l'une des C^2_{n+2} *combinaisons binaires* de $n+2$ indices (chaque indice représentant un sommet d'une configuration surabondante propre $(n+1)$-aire, susceptible d'avoir pour trace la

figure homologique envisagée) et plus généralement, chacun de ses C_{n+2}^{k+1} éléments k-aires de l'une des C_{n+2}^{k+1} *combinaisons* $(k+1)$-*aires* de ces $n+2$ indices; de telle sorte que tout élément k-aire supporte tout élément de polynarité inférieure affecté d'une combinaison dont tous les indices figurent dans la combinaison de l'élément k-aire, et repose sur tout élément de polynarité supérieure affecté d'une combinaison où figurent tous les indices de la combinaison attachée à cet élément k-aire.

La figure polaire *ternaire*, trace, sur son plan, des droites et plans ternaires de jonction des cinq sommets d'une même configuration surabondante quaternaire, peut être aussi considérée comme la *projection* de la figure du plan quaternaire déterminée par deux triangles (de plans ternaires distincts) qui sont *en perspective* (c'est-à-dire dont les sommets sont deux à deux alignés avec un même point). Cela revient à la considérer comme la projection des points et droites d'intersection des cinq plans ternaires d'une même *configuration surabondante corrélative quaternaire* (les deux plans des triangles et les trois plans de leur trièdre de perspective).

La figure polaire ternaire (de même que la figure polaire n-aire) est à elle-même sa propre corrélative, et sera désignée, en vue des généralisations (§ IX, 3), par l'une ou l'autre des expressions : $g(3, 5)$ ou $G(3, 5)$ (suivant qu'on la considère comme trace d'un pentangle quaternaire, ou comme projection des éléments d'intersection d'un système de cinq plans). La figure polaire n-aire sera de même désignée par $g(n, n+2)$, ou $G(n, n+2)$.

Nous appelons *triangle*, *quadrangle*, *quadrilatère* de la figure polaire *ternaire* (*fig.* 2, I), un triangle, un quadrangle, un quadrilatère, dont tous les éléments, *sommets et côtés*, sont des éléments de la figure.

Celle-ci contient 20 triangles, formant 10 *paires* de triangles dits *réciproques*, deux triangles réciproques étant homologiques relativement à un point et à une droite de la figure, qui seront aussi dits *réciproques*.

Il y a cinq quadrangles et cinq quadrilatères, respectivement réciproques les uns des autres; chaque quadrangle peut être considéré (de quatre façons distinctes) comme formé d'un triangle de la figure et du centre d'homologie de ce triangle avec son réciproque; le quadrilatère réciproque est alors formé du triangle réciproque du précé-

dent et de l'axe de l'homologie correspondante. Chaque quadrangle est circonscrit à son quadrilatère réciproque, de telle sorte que trois côtés *concourants* du quadrangle soient toujours unis à trois sommets *non alignés* du quadrilatère, ce qu'on peut caractériser en

Fig. 2, I.

disant que le quadrangle est *polairement circonscrit* à son quadrilatère réciproque.

(Inversement, si un quadrangle est *polairement circonscrit* à un quadrilatère, leurs dix sommets et leurs dix côtés sont les éléments d'une même figure polaire.)

Pour la notation des éléments de la figure polaire ternaire, nous préférons remplacer la combinaison *ternaire* affectée à chaque *droite* par la combinaison *binaire* des deux indices qui ne figurent pas dans cette combinaison ternaire, c'est-à-dire *par la même combinaison binaire qui est attachée au point réciproque de cette droite*. Deux éléments d'espèces différentes qui n'ont *nul indice commun* sont alors *unis*.

IV. — La seconde proposition fondamentale d'alignement.

1. Diverses propositions équivalentes au postulat de Pappus et concernant le champ ternaire. — 2. Proposition équivalente concernant le champ réglé quaternaire. — 3. Application aux ponctuelles. — 4. Énumération des autres postulats.

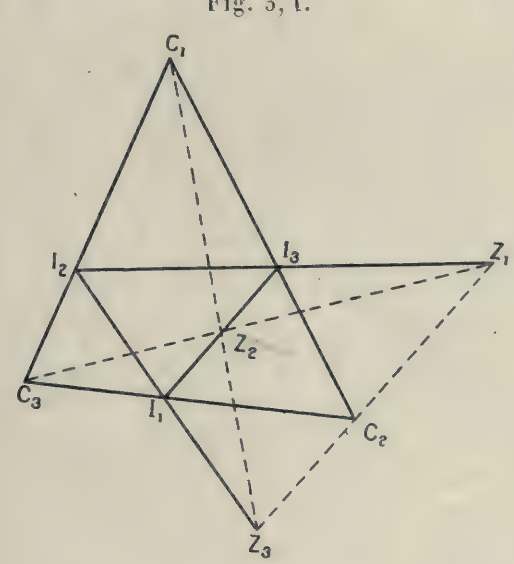
1. Le *postulat de Pappus*, ou *deuxième proposition fondamentale d'alignement*, peut s'énoncer sous cette forme, qui renferme la proposition corrélative :

Si un triangle est inscrit à un autre triangle, toute droite arbitrairement issue d'un sommet du triangle circonscrit peut être prise pour côté (et tout point arbitrairement choisi sur un côté du triangle inscrit peut être pris pour sommet) d'un troisième triangle circonscrit au triangle circonscrit et inscrit au triangle inscrit. Les trois triangles forment donc un cycle où chacun est inscrit au précédent et circonscrit au suivant.

(Les éléments, còtés et sommets, de deux triangles étant distincts, l'un d'eux est dit *inscrit* à l'autre, lequel lui est dit *circonscrit*, si chaque sommet du premier repose sur un côté du second. Un sommet du triangle inscrit et le sommet du triangle circonscrit opposé au côté sur lequel repose le premier seront dits *homologues;* un côté de l'un et un côté de l'autre, opposés à des sommets homologues, seront aussi dits *homologues.*)

C_1, C_2, C_3 étant les sommets du triangle circonscrit (C) (*fig.* 3, I)

Fig. 3, I.



et I_1, I_2, I_3, les sommets homologues du triangle inscrit (I), une droite arbitraire issue de C_1, par exemple, et rencontrant en Z_2, Z_3, les côtés I_1I_3, I_1I_2, issus du sommet I_1 homologue de C_1, le point de concours Z_1 des droites C_3Z_2, C_2Z_3, est uni à I_2I_3.

Remarque. — Si les triangles envisagés sont en outre *homologiques* (les droites de jonction de leurs couples de sommets dits *homologues* étant concourantes), la propriété mentionnée s'établit

sans recourir à nul postulat, et les triangles (Z) à la fois inscrits au triangle (I) et circonscrits au triangle (C), *le leur sont homologiquement*. Nous examinerons ce cas dans un Chapitre spécial consacré aux triangles homologiquement inscrits ou circonscrits.

En se reportant aux définitions qui seront données pour les polygones (Chap. IV, § I), on voit que l'énoncé donné équivaut manifestement au suivant, qui est l'énoncé ordinaire de la proposition de Pappus (*même figure* 3, I) :

Si les deux triples de sommets alternés (C_1, I_2, C_3), (I_3, I_1, Z_2), *d'un hexagone* $C_1 I_3 I_2 I_1 C_3 Z_2$ *sont chacun formés de points alignés, les points diagonaux principaux* C_2, Z_1, Z_3, *de cet hexagone* (points de concours des paires de côtés opposés) *sont aussi alignés.*

De même et corrélativement (*même figure*), si les deux triples de côtés alternés ($C_1 I_3$, $Z_1 Z_3$, $I_1 C_3$), ($I_3 Z_1$, $Z_3 I_1$, $C_3 C_1$), d'un hexagone $C_1 I_3 Z_1 Z_3 I_1 C_3$ sont chacun formés de droites concourantes, ses diagonales principales ($C_1 Z_3$, $I_3 I_1$, $Z_1 C_3$), droites de jonction des couples de sommets opposés, sont aussi concourantes.

Le premier hexagone est l'*hexagone proprement dit de Pappus*, et le second, l'*hexagone corrélatif de Pappus*.

Réciproquement, si trois sommets alternés d'un hexagone sont alignés, ainsi que ses trois points diagonaux principaux, ses trois autres sommets (alternés) sont aussi alignés.

Car les trois sommets alignés et les trois points diagonaux principaux forment deux triples de sommets alternés d'un hexagone *de Pappus*, dont les points diagonaux principaux sont les trois autres sommets du premier hexagone.

Remarque. — Comme précédemment, il y a un cas particulier d'hexagone de Pappus pour lequel la propriété s'établit indépendamment de tout postulat. C'est celui où les diagonales principales de cet hexagone sont concourantes; ses points diagonaux sont alors alignés sur une droite *concourant avec celles qui portent ses triples de sommets alternés* (polaire, relative à ces dernières, du point de concours des diagonales principales); réciproquement, si la droite qui porte les points diagonaux principaux d'un hexagone de Pappus concourt avec celles qui portent ses triples de sommets alternés, cet hexagone est un hexagone particulier de Pappus dont les diagonales principales sont concourantes.

Un troisième énoncé équivalent aux précédents est le suivant :

Si les éléments (a, b, c), (x, y, z), de même espèce et distincts de deux triangles, sont tels que les éléments des trois paires (a, x), (b, y), (c, z), soient associés dans une première homologie de ces triangles, et que les éléments des trois paires (a, y), (b, z), (c, x), soient associés dans une seconde homologie, les éléments des trois paires (a, z), (b, x), (c, y), seront aussi associés dans une troisième homologie.

Car ces deux triangles peuvent être considérés comme les deux triangles *de côtés alternés* d'un même hexagone de Pappus, les deux systèmes de points d'intersection de leurs côtés associés dans les deux homologies étant les deux triples alignés de sommets alternés de cet hexagone; et alors, les trois autres points d'intersection de leurs côtés se trouvant être les points diagonaux principaux de cet hexagone sont aussi alignés sur une droite, axe d'une troisième homologie où sont associés de la troisième façon indiquée les éléments de ces triangles.

2. Du postulat de Pappus se déduit la *proposition fondamentale du champ réglé de support quaternaire*, que l'on pourra, si l'on veut, adopter comme postulat, au lieu et place du postulat de Pappus.

Des droites qui ont un point commun sont dites *concourantes*, et des droites qui reposent sur un même plan ternaire sont dites *coplanaires*.

Deux droites concourantes sont aussi coplanaires, et réciproquement; elles seront dites *incidentes*.

Diverses droites deux à deux concourantes sans être ensemble concourantes sont coplanaires, et diverses droites deux à deux coplanaires sans être ensemble coplanaires, sont concourantes.

A tout point non uni à nulle de deux droites non incidentes et reposant sur leur support quaternaire commun, est unie une droite unique simultanément incidente à ces deux droites : droite d'intersection des plans ternaires de jonction de ce point et des deux droites.

De même, sur tout plan ternaire non uni à nulle de deux droites non incidentes et reposant sur leur support quaternaire commun, repose une droite unique simultanément incidente à ces deux droites : droite de jonction des points d'intersection du plan ternaire envisagé et de ces droites.

Deux droites incidentes *en des points distincts* à deux droites non incidentes sont aussi non incidentes (car leur incidence entraînerait l'incidence des premières); elles reposent d'ailleurs sur le support quaternaire des premières.

On détermine aisément des droites *simultanément incidentes* à trois droites *deux à deux non incidentes de même support quaternaire :* à tout point (ou à tout plan) uni à l'une des trois droites est attachée une *unique telle droite*, et deux telles droites sont *non incidentes* (car en les supposant incidentes, à leur point d'incidence, nécessairement extérieur à deux au moins des trois droites données, seraient unies deux droites simultanément incidentes aux deux droites non incidentes mentionnées).

Voici la *proposition fondamentale* annoncée :

Si trois droites (d_a, d_b, d_c) *deux à deux non incidentes et de même support quaternaire sont simultanément incidentes à trois droites* (t_i, t_j, t_k) (nécessairement deux à deux non incidentes et reposant sur le support quaternaire des premières), *toute droite* t_x *simultanément incidente aux droites du triplet* (d) *et toute droite* d_z *simultanément incidente aux droites du triplet* (t) *sont l'une à l'autre incidentes.*

Montrons qu'à tout plan (ou à tout point) uni à une droite t_x simultanément incidente aux trois droites (d) est unie une droite d_x simultanément incidente aux trois droites (t).

Désignons par Z_{ai} le point d'incidence des droites d_a et t_i, et soient (D_a, D_b, D_c), (T_i, T_j, T_k), les triplets de traces des droites (d) et (t) sur un plan ternaire arbitraire non uni à nul des neuf points Z et reposant sur le support quaternaire des droites (d) et (t).

Considérons un hexagone dont les deux triplets de sommets alternés soient ces deux triplets de traces, soit l'hexagone $D_aT_iD_bT_jD_cT_k$.

Ses points diagonaux principaux sont évidemment les traces des intersections des paires de plans ($d_a t_i$, $d_c t_j$), ($d_b t_i$, $d_c t_k$), ($d_b t_j$, $d_a t_k$), c'est-à-dire les traces des droites de jonction des trois paires de points (Z_{aj}, Z_{ci}), (Z_{ci}, Z_{bk}), (Z_{bk}, Z_{aj}), droites qui sont *les côtés du triangle* $Z_{aj}Z_{ci}Z_{bk}$.

Les points diagonaux principaux de l'hexagone sont donc alignés sur la trace du plan ternaire de ce triangle; et si le plan de l'hexagone porte une droite t_x simultanément incidente aux trois droites (d),

les trois sommets alternés (D) de l'hexagone sont alignés sur cette droite t_x; les trois sommets alternés (T) sont alors aussi alignés (par la *réciproque* de la proposition de Pappus), et la droite d_x qui les porte est simultanément incidente aux trois droites t_i, t_j, t_k.

Donc, sur un plan ternaire uni à une droite arbitraire t_x simultanément incidente aux trois droites (d), les traces de trois droites t_i, t_j, t_k, simultanément incidentes aux trois droites (d), *et par suite les traces de toutes les droites simultanément incidentes à ces trois droites* (d), sont alignées sur une même droite d_x; de même, sur ce même plan, toutes les droites d_z simultanément incidentes aux trois droites (t) ont leurs traces alignées sur t_x. Donc, toute droite t_x et toute droite d_z sont incidentes. C. Q. F. D.

Nous reviendrons, dans les notes finales du Chapitre XIII (note 7), sur cette figure des six droites (d) et (t), qui conduit à d'intéressants résultats.

3. Le postulat de Pappus équivaut à une importante proposition concernant les ponctuelles :

Deux ponctuelles de supports distincts et incidents, rapportées perspectivement à une même troisième, sont rapportées perspectivement l'une à l'autre, si le point d'incidence des deux supports est uni à la droite de jonction des deux centres respectifs de perspective de chacune d'elles avec la troisième.

C_{13}, C_{23}, étant les centres respectifs de perspective de la ponctuelle (3) et des ponctuelles (1) et (2), dont le point d'incidence Z est uni à $C_{13}C_{23}$ (*fig.* 4, I), et A_1, A_2, étant les points d'incidence du support de la troisième sur ceux des premières, les droites $C_{13}A_2$, $C_{23}A_1$, se coupent en C_{12}. Soit $X_1X_2X_3$ le triangle de trois points homologues des trois ponctuelles; ce triangle, inscrit au triangle A_1A_2Z, a ses côtés X_1X_3 et X_2X_3 respectivement unis aux sommets C_{13} et C_{23} du triangle $C_{13}C_{23}C_{12}$, *circonscrit au triangle* A_1A_2Z. Le triangle $X_1X_2X_3$ est donc circonscrit au triangle des (C), et son côté X_1X_2 étant uni à C_{12}, les ponctuelles (1), (2) sont rapportées perspectivement par le centre C_{12}. C. Q. F. D.

Les deux propositions concernant les ponctuelles et déduites, l'une du théorème de Desargues, l'autre du postulat de Pappus, peuvent se réunir en une seule, qui s'énonce ainsi :

Deux ponctuelles de supports distincts, rapportées perspectivement à une même troisième (un élément de l'une et un élément de l'autre, perspectifs à un même élément de la troisième, sont dits *homologues*), *sont rapportées perspectivement l'une à l'autre, si un élément de l'une* (qui est alors le point d'incidence de leurs supports, nécessairement incidents), *coïncide avec l'élément homologue de l'autre.*

Fig. 4, I.

Car cette coïncidence ne peut se produire que dans l'un ou l'autre des deux cas envisagés.

(Deux ponctuelles de même support perspectives à une même troisième ont deux éléments qui coïncident avec leurs homologues : la trace du support de la troisième, et la trace de la droite de jonction des deux centres de perspective. Elles peuvent être considérées comme homologiques, l'un de ces points jouant le rôle de centre, et l'autre celui de plan d'homologie.)

4. Énumérons dès ici, bien qu'ils n'interviennent qu'ultérieurement, les autres postulats géométriques.

Les postulats précédents (d'appartenance et de Pappus) sont les postulats de la géométrie *pappusienne*. En y ajoutant le postulat *du quadrangle*, elle devient *pascalienne*.

Ce postulat consiste à affirmer que les trois points diagonaux *toujours distincts* de la configuration surabondante propre ternaire

(points de concours des paires de côtés opposés d'un quadrangle) *ne peuvent être alignés.*

Il *suffit* d'ailleurs d'admettre ce postulat *pour un seul quadrangle.*

En introduisant l'ensemble des postulats de *disposition et de continuité*, la géométrie devient *archimédienne.*

Le postulat de *disposition polygonale à caractère projectif* de l'ensemble des points d'une droite, consiste à affirmer pour cet ensemble l'existence d'une disposition intrinsèque dite « *polygonale* », ou « *en chaîne fermée* », én vertu de laquelle deux couples arbitraires distincts d'éléments distincts de la droite présentent toujours soit l'un, soit l'autre de deux caractères distincts : dans un cas ces couples sont dits *emboîtés*, et dans l'autre, *enchevêtrés.* Le caractère projectif de cette disposition résulte de ce postulat que si deux ponctuelles sont perspectives, deux couples de l'une sont toujours disposés (*emboîtés* ou *enchevêtrés*) comme les deux couples perspectifs de l'autre.

Le postulat de disposition projective entraîne d'ailleurs, comme on le verra, le postulat précédent du quadrangle.

Les postulats précédents permettent de construire *linéairement* (¹) à partir de trois points donnés d'une droite, un ensemble illimité de points de cette droite, que l'on peut mettre en correspondance biunivoque et réciproque avec l'ensemble des *nombres rationnels;* cet ensemble, aussi bien déterminé par trois autres quelconques de ses points, s'appelle « l'ensemble rationnel », ou « *réseau binaire de Mobius* », attaché à l'un quelconque de ses triples de points.

Supposant que l'ensemble des points d'un réseau binaire n'épuise pas l'ensemble des points de son support, le postulat d'*Archimède* affirme qu'il y a des points du réseau dans chacune des deux *portions* déterminées sur la disposition de la droite par deux points *dont un et un seul appartient au réseau.* Un autre postulat, en général non mentionné, affirme la même propriété pour deux points *dont nul n'appartienne au réseau* (propriété d'ailleurs assurée pour deux points du réseau, puisque cet ensemble est disposé comme l'ensemble

---

(¹) Une « *construction élémentaire* » consistant à passer de deux éléments à leur élément de jonction ou d'intersection, une construction « *linéaire* » est *une suite finie de constructions élémentaires.*

des nombres rationnels, avec lequel il est en correspondance biunivoque et réciproque).

Ces deux propositions peuvent s'énoncer en une seule, affirmant que le réseau, par nature *dense en soi*, est *dense* aussi *sur la droite qui le porte*.

Tout point de la droite détermine alors univoquement une *coupure* de l'ensemble des nombres rationnels attachés au réseau, *deux points distincts déterminant deux coupures distinctes*.

Le postulat de *Cantor* affirme qu'inversement, toute coupure de l'ensemble des nombres rationnels attachés au réseau est déterminée par un point de la droite qui porte ce réseau.

Les postulats de la Géométrie *pascalienne* sont dits les postulats « *descriptifs* » ; ils peuvent être considérés comme les postulats géométriques *essentiels*, la majeure partie de la théorie pouvant s'édifier sans qu'il y ait lieu de recourir aux postulats de disposition ou de continuité.

La preuve de la *compatibilité* de ces postulats résulte de ce fait qu'ils sont vérifiés pour l'ensemble *des n-uples de nombres réels et des équations linéaires homogènes à n variables*.

V. — Corrélations particulières et collinéations restreintes.

1. Corrélation ternaire déduite de la proposition de Pappus. — 2. Corrélation Pappus quaternaire. — 3. Corrélation Pappus n-aire. — 4. Collinéations Poncelet, collinéations générales, collinéations restreintes.

1. La proposition de Pappus nous permet de construire immédiatement une corrélation *particulière* (1) dans le plan ternaire.

Considérons dans ce plan deux droites m_1, m_2, et deux points P_1, P_2, *extérieurs à ces droites, tels que la droite de jonction* p_3 *de ces points soit unie au point de concours* M_3 *de ces droites* (*fig.* 5, I).

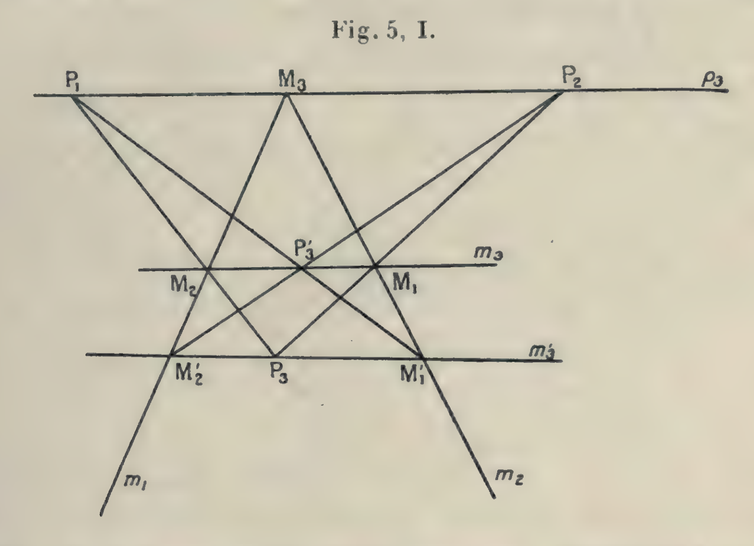
A tout point P_3 *non uni à nulle des trois droites* m_1, m_2, p_3, nous associerons la droite de jonction m_3 des projections M_2, M_1 de ce point sur les droites m_1, m_2 faites par les centres respectifs P_1, P_2

(1) Cette corrélation offre ce caractère *particulier* que la paire de réciprocités bitangentes attachées à toute corrélation entre deux champs ternaires de même support, dégénèrent ici en le couple de points et le couple de droites envisagés.

(sur chaque droite m_1 ou m_2, la projection est faite par le centre P_1 ou P_2 *de même indice*, et est affectée *d'un indice différent*); autrement dit, tout point P_3 aura pour corrélative *le troisième côté* m_3 *d'un triangle* $m_1 m_2 m_3$ *ayant pour autres côtés les droites données* m_1, m_2, *et inscrit au triangle* $P_1 P_2 P_3$.

Inversement, pour toute droite m_3 non unie à nul des trois points

Fig. 5, I.



P_1, P_2, M_3, il y a un point univoquement déterminé P_3 non uni à nulle des trois droites m_1, m_2, p_3, et dont cette droite m_3 est la corrélative : troisième sommet du triangle $P_1 P_2 P_3$ *circonscrit au triangle* $m_1 m_2 m_3$; ce point P_3 est dit l'*anticorrélatif* de la droite m_3.

(Jusqu'ici, dans les deux triangles envisagés, deux éléments homologues sont affectés du même indice.)

Des points alignés sur une droite m'_3 non unie à nul des trois points P_1, P_2, M_3, ont pour corrélatives, *en vertu de la proposition de Pappus*, des droites concourantes, *toutes unies au troisième sommet* P'_3 *d'un triangle* $P_1 P_2 P'_3$ *circonscrit au triangle* $m_2 m_1 m'_3$. Ce point P'_3, non uni à nulle des trois droites m_1, m_2, p_3, sera dit le *corrélatif* de la droite m'_3, et inversement la droite m'_3, qui a pour corrélatif un point P'_3, *troisième côté* m'_3 *d'un triangle* $m_1 m_2 m'_3$ *inscrit au triangle* $P_2 P_1 P'_3$, est l'*anticorrélative* de ce point. (Observer qu'ici l'élément d'indice 1 de chaque triangle a pour homologue l'élément d'indice 2 de l'autre.)

La double relation de point à droite et de droite à point ainsi construite étant *partout biunivoque* (sauf jusqu'ici entre points unis

à l'une des trois droites m_1, m_2, p_3 d'une part, et droites unies à l'un des trois points P_1, P_2, M_3 d'autre part) offre, pour les éléments auxquels elle s'applique, le caractère de la collinéation, puisque *des points alignés ont pour corrélatives des droites concourantes*. On achèvera de la définir pour les éléments non encore envisagés, en lui imposant de conserver ce caractère (d'être partout biunivoque et d'associer à des points alignés des droites concourantes).

On voit alors aisément qu'un point de m_1 ou de m_2 a pour corrélative sa projetante par le point P_2 ou P_1 *d'indice différent* (et pour anticorrélative sa projetante par le point P_1 ou P_2 *de même indice*); P_1 et P_2 ont respectivement pour corrélatives les droites de même indice m_1, m_2 (et pour anticorrélatives les droites d'indice différent m_2, m_1); M_3 a pour corrélative et pour anticorrélative la droite p_3, ou P_1P_2; un point de cette dernière droite a pour corrélative et pour anticorrélative une même droite unie à M_3, et portant, *en vertu du théorème de Desargues*, les points dont les corrélatives ainsi que les anticorrélatives concourent au point envisagé.

La droite p_3 porte les points pour chacun desquels la corrélative et l'anticorrélative se confondent, de même que le point M_3 est uni aux droites dont le corrélatif et l'anticorrélatif se confondent.

Les points des droites m_1, m_2 sont les seuls qui soient unis à leurs corrélatives, ainsi qu'à leurs anticorrélatives, celles-ci étant à leur tour unies à l'un des points P_1, P_2.

Remarque. — Notons que, dans la corrélation qui vient d'être construite (que nous appellerons *corrélation ternaire Pappus*), la radiée corrélative d'une ponctuelle donnée (par exemple de la ponctuelle de support m'_3 décrite par P_3) a pour section caractéristique sur l'une des deux droites données (par exemple sur m_1) *une ponctuelle perspective à la première* (la ponctuelle décrite par M_2, les points P_3 et M_2 étant alignés avec P_1).

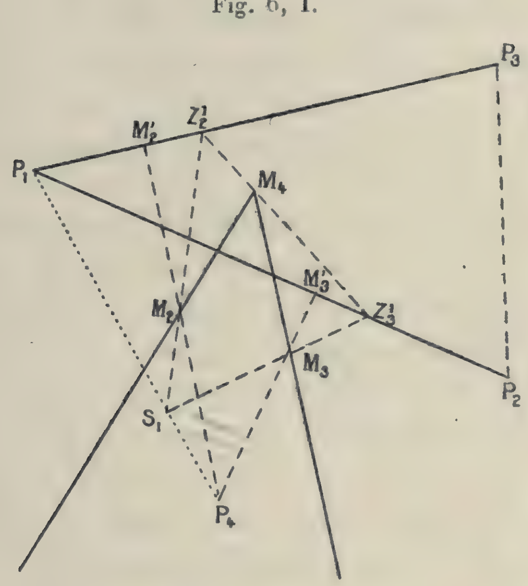
2. Soient donnés dans un plan quaternaire trois points non alignés P_1, P_2, P_3, et trois plans ternaires m_1, m_2, m_3, non unis à une même droite, le point de concours M_4 de ces trois plans (m), non uni à nul côté du triangle des (P), *étant uni au plan ternaire de support p_4 de ce triangle*, et ce dernier plan p_4 n'étant uni à nulle arête du trièdre $m_1m_2m_3$.

P_4 étant un point arbitraire du support quaternaire, extérieur aux quatre plans m_1, m_2, m_3, p_4, et M_k ($k = 1, 2, 3$) la trace de l'arête du trièdre $m_1 m_2 m_3$ opposée à la face m_k sur le plan ternaire uni à P_4 et au côté du triangle $P_1 P_2 P_3$ opposé au sommet P_k, nous donnerons pour corrélatif au point P_4 le plan ternaire de jonction des trois points M_1, M_2, M_3; autrement dit, le plan corrélatif du point P_4 est la quatrième *base* m_4 d'un tétraèdre $m_1 m_2 m_3 m_4$ (ou $M_1 M_2 M_3 M_4$) ayant pour autres bases les trois plans (m) donnés, *et inscrit au tétraèdre* $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Montrons que si le point P_4 décrit une droite arbitraire, chaque côté $M_i M_j$ (par exemple $M_2 M_3$) du triangle $M_1 M_2 M_3$ reste uni à un point fixe X_k du plan m_k sur lequel repose ce côté.

Faisant abstraction du côté $P_2 P_3$ de $P_1 P_2 P_3$ et de l'arête $m_2 m_3$

Fig. 6, I.



de $m_1 m_2 m_3$, considérons (*fig.* 6, I) deux paires de droites incidentes ($P_1 P_2$, $P_1 P_3$), ($M_4 M_2$, $M_4 M_3$), le centre M_4 de la seconde paire étant uni au plan d'incidence $P_1 P_2 P_3$ de la première. Z_2^1, Z_3^1 sont les points où la droite d'intersection de leurs plans ternaires (unie à M_4) rencontre les droites $P_1 P_3$, $P_1 P_2$ de la paire de centre P_1.

Si, par le point arbitraire P_4 du support quaternaire de la figure, on mène la droite $P_4 M_2 M'_2$ simultanément incidente à $M_4 M_2$ en M_2 et à $P_1 P_3$ en M'_2, et la droite analogue $P_4 M_3 M'_3$ simultanément inci-

dente à M_1M_3 et à P_1P_2, le point de concours S_1 des droites $Z_2^1M_2$, $Z_3^1M_3$ *est uni à la droite* P_1P_4 ; car ces droites $Z_2^1M_2$, $Z_3^1M_3$ sont les traces sur le plan $M_2M_4M_3$ des plans $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$, dont l'intersection est P_1P_4.

Si le point P_4 décrit une droite d, le point S_1 décrit dans le plan $M_2M_4M_3$ (ou m_1) une droite d_1, projection de d par P_1.

La droite M_2M_3, *corrélative de* S_1 *dans la corrélation ternaire Pappus* $(Z_2^1, \overline{M_4M_2})$, $(Z_3^1, \overline{M_4M_3})$, $(M_4, \overline{Z_2^1Z_3^1})$, est alors unie au corrélatif X_1 de d_1 (dans cette corrélation ternaire). C. Q. F. D.

Chaque côté du triangle $M_1M_2M_3$ étant donc uni à un point fixe X_k du plan m_k sur lequel repose ce côté, le plan *variable* de ce triangle est uni à une droite fixe (sur laquelle sont nécessairement alignés les trois points X_k).

La relation établie entre le point P_4 et le plan $M_1M_2M_3$ est donc bien une relation de collinéation. On définira les plans corrélatifs des points unis à l'un des plans m_1, m_2, m_3, p_4, en imposant à la relation de conserver son caractère (d'être partout biunivoque, et de transformer des points alignés en plans unis à une même droite).

Remarque. — Observons encore qu'une ponctuelle d décrite par P_4 et l'une des ponctuelles caractéristiques de la feuille corrélative décrite par le plan $M_1M_2M_3$, soit la ponctuelle décrite par M_2, sont *perspectives à une même troisième*, soit à la ponctuelle d_1 décrite par S_1 (la première perspective ayant pour centre le point P_1, et la seconde le point mentionné Z_2^1, trace de P_1P_3 sur le plan m_1).

3. Soient dans un plan n-aire $n-1$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, formant une *véritable* configuration caractéristique $(n-1)$-aire de support p_n, et $n-1$ plans $(n-1)$-aires $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, qui n'aient qu'un point à tous commun et forment donc une configuration caractéristique de la gerbe de plans $(n-1)$-aires de support n-aire qui a son centre en leur point de concours M_n ; ce point de concours M_n étant uni au plan $(n-1)$-aire p_n de jonction des (P), *mais extérieur aux diverses bases de la configuration des* (P), de même que le support p_n des (P) *n'est uni à nulle des* $n-1$ *arêtes binaires de la configuration des* (m) (intersections des divers plans m_i, $n-1$ à $n-1$).

P_n étant un point arbitraire du support n-aire envisagé, extérieur

aux divers plans m_i et au plan p_n, et M_k étant la trace sur l'arête binaire d_k opposée au plan m_k (dans la configuration des m_i) du plan ($n - 1$)-aire uni au point P_n et à la base ($n - 2$)-aire opposée à P_k (dans la configuration des P_i), *nous associerons au point* P_n *le plan* ($n - 1$)-aire *de jonction* m_n *des* $n - 1$ *points* M_k.

Autrement dit, *le plan corrélatif* d'un point P_n sera la dernière base m_n d'une configuration caractéristique n-aire $m_1 m_2 \ldots m_n$, ayant pour autres bases les $n - 1$ plans donnés $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, et *inscrite à la configuration* $P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n$.

(*Dans le cas de* n *pair*, si l'on suppose en outre que chacun des $n - 1$ points donnés P_k soit uni au plan m_k de même indice, *tout point du support* n-aire *sera uni à son plan corrélatif;* de plus, *le corrélatif et l'anticorrélatif de tout élément coïncideront*, et la corrélation Pappus, devenant alors *réciproque*, s'appellera *la réciprocité polaire spéciale à éléments correspondants unis*. Nous donnons la démonstration au Chapitre II, § VII, pour le cas du champ quaternaire.)

Montrons que si le point P_n décrit une droite arbitraire d, chaque droite $M_i M_j$ (par exemple $M_1 M_2$) reste unie à un point fixe du plan ternaire des deux arêtes binaires d_i, d_j, qui portent les points M_i et M_j.

La droite d'intersection du plan ternaire $d_i d_j$ et du plan ($n - 1$)-aire p_n de support de la configuration des P_k rencontre en S^i_{ij}, S^j_{ij} les bases ($n - 2$)-aires de cette configuration opposées aux sommets P_i et P_j, et les droites $S^i_{ij} M_i$, $S^j_{ij} M_j$, *unies au plan ternaire* $d_i d_j$, concourent dans ce plan en X_{ij}. (La droite $S^i_{ij} S^j_{ij}$ est unie à M_n.)

Ce point X_{ij}, soit pour fixer les idées X_{12}, uni à chacun des deux plans ($n - 1$)-aires définis par le point P_n et chacune des deux bases ($n - 2$)-aires de la configuration des P_k respectivement opposées à P_1 et à P_2, est uni à leur intersection ($n - 2$)-aire définie par les $n - 2$ points $P_3, P_4, \ldots, P_{n-1}, P_n$, et est l'intersection de ce plan ($n - 2$)-aire et du plan ternaire $d_1 d_2$.

Quand le point P_n décrit une droite d, le plan ($n - 2$)-aire mentionné décrit le plan ($n - 1$)-aire ($P_3, P_4, \ldots, P_{n-1}, d$), et le point X_{12} décrit dans le plan ternaire $d_1 d_2$ une droite d_{12}, *intersection de ce plan ternaire et du plan* ($n - 1$)-aire *précédent*.

Alors, la droite $M_1 M_2$, *corrélative de* X_{12} *dans la corrélation*

ternaire Pappus (S_{12}^1, d_1), (S_{12}^2, d_2), $(M_n, S_{12}^1 S_{12}^2)$, *est unie à un point fixe* Y_{12}, *corrélatif de* d_{12} *dans cette corrélation.*

C. Q. F. D.

Il en résulte immédiatement que le plan $(n-1)$-aire de jonction des M_k, que nous avons associé au point P_n (dans la définition de la corrélation n-aire Pappus) reste uni, quand P_n décrit la droite d, *au plan fixe de jonction des* C_{n-1}^2 *points* Y_{ij}, *lequel est un plan* $(n-2)$-aire (puisque le plan de jonction des Y_{ij} et d'une arête binaire arbitraire de la configuration des m_k, plan dont la polynarité est supérieure *au plus* de deux unités à celle du plan en question, contient toute la configuration des m_k et se confond avec le support n-aire de celle-ci).

La relation établie entre le point P_n et son plan $(n-1)$-aire associé offre donc, pour les éléments auxquels elle s'applique, le caractère de la collinéation. On la définira pour les éléments provisoirement écartés en lui imposant de conserver ce caractère et d'être partout biunivoque.

Remarque. — Observons encore que, dans la corrélation n-aire Pappus, la ponctuelle décrite par un point P_n, et une ponctuelle caractéristique convenablement choisie de la forme binaire décrite par le plan corrélatif de P_n, soit la ponctuelle décrite sur d_1 par M_1, *sont les termes extrêmes d'une chaîne de quatre ponctuelles, où deux ponctuelles consécutives sont perspectives.*

Car d'abord les ponctuelles décrites par M_1 et X_{12} sont perspectives par le centre S_{12}^1; et ensuite, les ponctuelles décrites par X_{12} et P_n sur d_{12} et sur d sont telles que la droite de jonction $X_{12}P_n$ de deux points homologues *soit incidente à une même troisième droite*, intersection du plan quaternaire (d_{12}, d) et du plan $(n-3)$-aire $P_3P_4\ldots P_{n-1}$. (On verra bientôt que c'est là la propriété caractéristique de deux ponctuelles *de supports non incidents, perspectives à une même troisième.*)

4. La collinéation générale a été définie : *une relation partout biunivoque et simultanée entre éléments constitutifs et entre formes binaires de deux formes linéaires isopolynaires.*

Cette relation n'est plus définie s'il s'agit de formes *binaires*.

Nous dirons qu'une relation *partout biunivoque* entre éléments de

deux formes binaires est *collinéaire*, si cette relation peut être envisagée comme résultant d'une relation de collinéation entre deux formes linéaires isopolynaires de polynarité supérieure à 2, auxquelles appartiennent respectivement les deux formes binaires considérées.

Cette définition n'imprime pas de caractère intrinsèque bien net à une paire de formes binaires en relation de collinéation; on ne saurait affirmer non plus que deux ponctuelles caractéristiques de deux formes binaires en collinéation présentent dans leur ensemble le même caractère, suivant que l'on suppose ces formes binaires appartenant à deux formes linéaires *isosimilaires* en relation de *projectivité*, ou à deux formes *dualisimilaires* en relation de *dualité*.

Le créateur de la Géométrie projective, *Poncelet*, attachait au terme de *projectivité* le sens de *relation existant entre deux formes géométriques déduites l'une de l'autre par une suite alternative finie de sections caractéristiques et de projections* (§ I, 4); il n'envisageait d'ailleurs que les projections *centrales* et les *homologies*, limitées au domaine quaternaire.

L'acception attribuée par *Chasles* à ce terme est plus large et coïncide, pour les collinéations ternaires et quaternaires (les seules qui fussent alors envisagées), avec celle que nous avons adoptée. (C'est du moins ce que laisse entendre l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques;* nous n'avons pas en mains les ouvrages de ces deux illustres géomètres.)

Nous allons maintenant introduire dans cette acception générale une petite restriction provisoire, qui, tout en la rétrécissant quelque peu, la laisse au prime abord plus large que l'acception de Poncelet. Cette restriction sera d'ailleurs levée par les postulats de disposition et de continuité.

Voici les remarques qui suggèrent cette restriction :

1° Deux ponctuelles caractéristiques *d'une même forme binaire*, de supports *distincts et incidents*, sont *perspectives :* par le point d'incidence du plan ternaire de leurs supports avec l'axe de la forme; si celle-ci est *centrée* (*radiée*), par son *centre*.

2° Deux ponctuelles caractéristiques *d'une même forme binaire*, de supports *distincts et non incidents*, sont telles que *les droites qui joignent leurs points homologues soient incidentes à une*

même troisième droite, intersection du plan quaternaire de leurs supports et de l'axe de la forme (axe même de la forme, dans le cas de la feuillée de plans ternaires). Elles sont alors, comme on le verra au paragraphe suivant, *perspectives à une même troisième* (dont le support est une droite arbitraire simultanément incidente aux supports des premières sans rencontrer l'axe de la forme, les centres de perspective étant les points d'intersection de la troisième droite mentionnée reposant sur l'axe de la forme, avec les deux plans unis à la droite arbitraire choisie et respectivement à l'un et à l'autre des deux premiers supports).

3° Dans la projectivité au sens Poncelet, deux ponctuelles caractéristiques de deux formes binaires associées par une projectivité établie entre deux formes linéaires isosimilaires de polynarité supérieure à 2 sur laquelle reposent ces formes binaires, *sont les termes extrêmes d'une suite juxtaposée de ponctuelles, où deux ponctuelles juxtaposées de la suite sont perspectives* (et ont par conséquent leurs supports distincts et incidents).

4° Il résulte de l'observation faite sur la corrélation *n*-aire Pappus et des deux alinéas 1° et 2° que, dans la corrélation Pappus, une ponctuelle donnée et une ponctuelle arbitraire caractéristique de la forme binaire corrélative de la première ponctuelle *présentent aussi le caractère mentionné dans l'alinéa précédent.*

5° En appelant « *collinéation Poncelet* » la collinéation résultant d'une suite finie de projectivités Poncelet et de corrélations Pappus, on voit que ce *même caractère* subsiste pour toute paire de ponctuelles (de supports confondus ou distincts, incidents ou non incidents) qui sont les sections caractéristiques de deux formes binaires associées dans une collinéation Poncelet entre deux formes linéaires isopolynaires de polynarité arbitraire.

C'est cette propriété que nous adopterons comme *caractéristique* de la relation de collinéation *provisoirement restreinte* entre deux ponctuelles de supports ou distincts (incidents ou non) ou confondus.

Deux ponctuelles seront donc dites *en relation de collinéation provisoirement restreinte*, *si elles peuvent être considérées comme les termes extrêmes d'une chaîne à deux extrémités de ponc-*

tuelles, où deux ponctuelles consécutives soient perspectives (et aient par conséquent leurs supports distincts et incidents).

Cette relation est évidemment *équivalentaire*, deux ponctuelles en relation de collinéation restreinte avec une même troisième étant elles-mêmes en relation de collinéation restreinte, la chaîne qui caractérise leur relation mutuelle résultant de la juxtaposition des deux chaînes relatives à chacune d'elles et à la troisième.

Deux formes binaires seront alors dites en relation de collinéation provisoirement restreinte, si leurs ponctuelles caractéristiques le sont (une ponctuelle de l'une et une ponctuelle de l'autre).

Deux formes *linéaires isopolynaires* seront dites en relation de collinéation provisoirement restreinte, si, étant en relation de collinéation générale, leurs formes binaires associées sont en relation de collinéation provisoirement restreinte (et cette relation est équivalentaire).

Nous déduirons de la proposition de Pappus qu'entre deux formes linéaires isopolynaires existe toujours *une et une seule* relation de collinéation restreinte où soient associés terme à terme les éléments de deux configurations surabondantes données de ces formes (en entendant par « *configuration surabondante* » d'une forme linéaire n-aire l'ensemble de $n+1$ éléments constitutifs de cette forme susceptibles de déterminer, sur un champ caractéristique de cette forme, une configuration surabondante de ce champ).

Cette proposition, étendue à la collinéation *générale*, constitue, *dans le cas de champs ternaires isosimilaires*, ce que l'on appelle le *théorème fondamental de la projectivité*.

Cette extension résultera des postulats de disposition et de continuité, et lèvera définitivement la restriction introduite.

Nous montrerons à la fin de ce Chapitre que l'on peut toujours transformer une configuration surabondante d'un champ n-aire en une autre configuration surabondante donnée de ce même champ par *un produit d'homologies effectuées dans ce support* (n au plus), ce qui donnera à la projectivité de Poncelet toute l'ampleur de la projectivité générale.

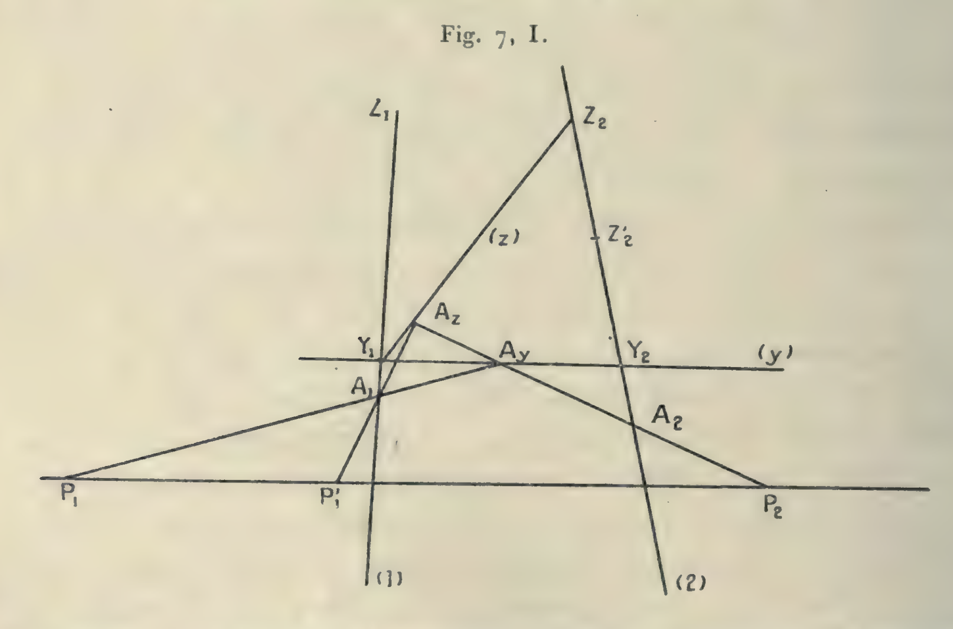
VI. — Ponctuelles en relation de collinéation restreinte.

1. Chaîne de trois ponctuelles consécutivement perspectives ou paire de ponctuelles perspectives à une même troisième. — 2. Chaîne de quatre ponctuelles consécutivement perspectives. — 3. Chaîne de plus de quatre ponctuelles consécutivement perspectives.

1. Théorème. — Si deux ponctuelles de supports *distincts*, incidents ou non incidents, sont simultanément perspectives à une même troisième, toute droite simultanément incidente aux supports des deux premières (mais *non concourante avec ces supports*, quand ils sont incidents), et dont les points d'incidence sur ces supports *ne soient pas des points homologues de ces ponctuelles*, porte une ponctuelle simultanément perspective aux deux premières.

Soient $Y_1 Z_1$, $Y_2 Z_2$, les supports des deux ponctuelles (1) et (2); Y_1, Y_2, leurs points d'incidence avec le support de la ponctuelle (y) simultanément perspective; P_1, P_2, les centres respectifs de ces perspectives, extérieurs tous deux au support (y) et le premier au support (1), ainsi que le second au support (2) (*fig.* 7, I).

Fig. 7, I.



Supposons d'abord que la quatrième droite arbitraire (z) simultanément incidente à (1) et à (2) soit $Y_1 Z_2$, unie au point d'incidence Y_1 de (y) et de (1), cette droite (z) *n'étant pas unie au point* P_2, *sans quoi les points* Y_1 *et* Z_2 *seraient des points homologues des ponctuelles* (1) *et* (2).

A_1, A_y, A_2, étant un triple de points homologues des trois ponctuelles (1), (y), (2), $A_1 A_y$ étant unie à P_1 et $A_2 A_y$ à P_2, la droite $A_2 A_y$, *coplanaire à* $Y_1 Z_2$, la rencontre en A_z ; et le triangle $A_1 A_y A_z$ ayant ses sommets unis aux droites (1), (y), (z), *concourantes* en Y_1, tandis que ses deux côtés $A_y A_1$, $A_y A_z$ sont respectivement unis aux points P_1, P_2, son troisième côté $A_1 A_z$ est uni à un point fixe P'_1 de $P_1 P_2$, et les ponctuelles (1) et (2) sont simultanément perspectives à la ponctuelle (z) selon les centres respectifs P'_1 et P_2.

Si le support (z) rencontre les supports (1) et (2) en des points Z_1, Z_2, tous deux distincts de Y_1 et de Y_2, on prendra sur le support (2), par exemple, un point auxiliaire Z'_2 *qui ne soit l'homologue ni de* Y_1 *ni de* Z_1, et l'on appliquera consécutivement la démonstration précédente aux trois supports $Y_1 Z'_2$, $Z'_2 Z_1$, $Z_1 Z_2$.

C. F. D. Q.

Si les ponctuelles (1) et (2) sont perspectives, soit qu'elles concourent avec le support de la ponctuelle (y) simultanément perspective (*Desargues*), soit que leur point de concours appartienne à la droite des centres de perspective (*Pappus*), soit que ces deux centres soient confondus : toute droite (z) simultanément incidente aux supports (1) et (2) porte, *en vertu du théorème de Desargues, si les droites* (1), (2), (z) *sont concourantes, et en vertu de la proposition de Pappus si ces trois droites sont coplanaires, une ponctuelle simultanément perspective aux ponctuelles* (1) *et* (2).

Si l'on suppose confondus les supports des ponctuelles (1) et (2), il résulte du théorème de Desargues que toute droite concourant avec le support commun et avec le support de la ponctuelle simultanément perspective, et de la proposition de Pappus que toute droite concourant avec le support commun et avec le support des centres de perspective, porte une ponctuelle simultanément perspective aux ponctuelles (1) et (2).

Conclusion. — *On peut donc, sans altérer la relation établie entre deux ponctuelles par la condition qu'elles soient simultanément perspectives à une même troisième donnée, remplacer cette dernière par une autre de support convenablement choisi, c'est-à-dire incident aux supports de chacune des deux premières sans être avec eux concourant* (la restriction de non-concurrence n'existant plus si les deux premières sont perspectives), *et qui ne soit pas*

toutefois la droite de jonction de points homologues des deux premières.

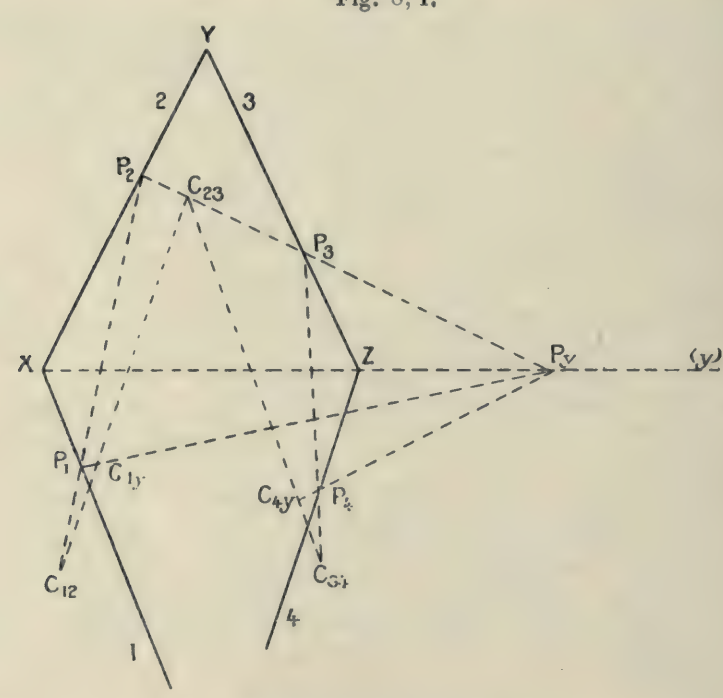
2. Soit une chaîne de *quatre* ponctuelles, où deux ponctuelles consécutives sont perspectives, et ont par conséquent leurs supports distincts et incidents, la première et la dernière ponctuelle *étant supposées avoir leurs supports distincts, incidents ou non.*

Nous distinguerons divers cas :

1° Supposons que les quatre supports soient tous *distincts*, et que trois quelconques d'entre eux ne soient pas concourants ; soient X, Y, Z les points d'incidence respectifs des supports consécutifs.

Soit y la droite de jonction XZ des points d'incidence de (1) avec (2) et de (3) avec (4) (*fig.* 8, I); *supposons encore que le centre* C_{23}

Fig. 8, I.



de perspective des ponctuelles (2) *et* (3) *ne soit pas uni à cette droite* y.

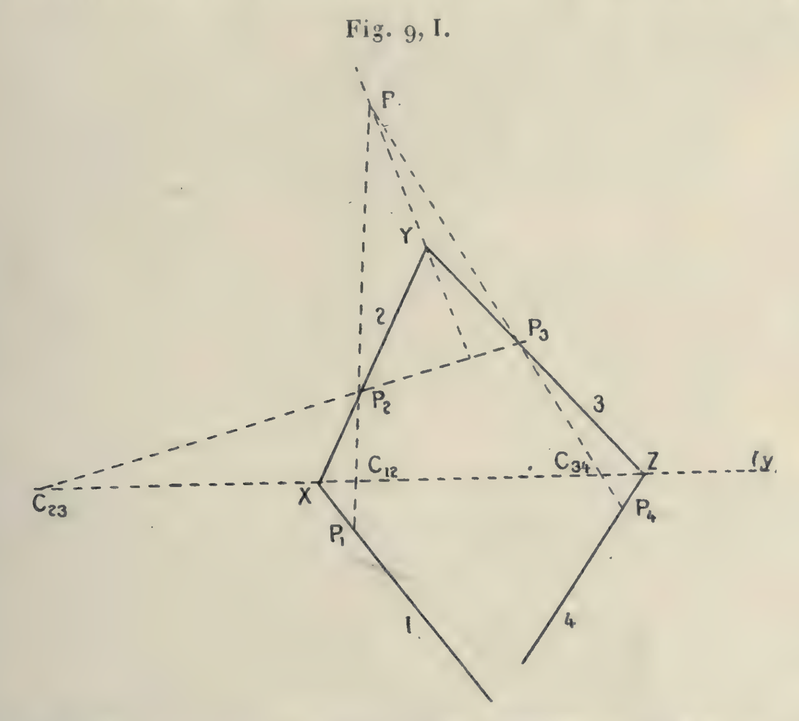
P_1, P_2, P_3, P_4, étant un quadruple de points homologues des quatre ponctuelles, P_i *uni à* (i) *et* P_iP_j *uni à* C_{ij}, et P_y la trace de P_2P_3 sur y (ces deux droites sont coplanaires), les ponctuelles (1) et (y) (décrites par P_1 et P_y) perspectives à la ponctuelle (2) (décrite par P_2) *sont perspectives entre elles, la droite* P_1P_y *étant unie à*

un point fixe C_{1y} *de* $C_{12}C_{23}$, puisque les trois supports 1, 2, y, sont concourants. De même, les ponctuelles (4) et (y) sont perspectives, la droite P_4P_y étant unie à un point fixe C_{4y} de $C_{23}C_{34}$.

Les ponctuelles extrêmes (1) et (4) *sont donc perspectives à une même troisième* (y), par les centres respectifs C_{1y}, C_{4y}, unis l'un à $C_{12}C_{23}$, l'autre à $C_{23}C_{34}$.

Si les trois centres C_{12}, C_{23}, C_{34}, de perspective des ponctuelles consécutives, sont tous unis à la droite y (on supposera toujours C_{23} distinct de C_{12} et de C_{34}, sans quoi les ponctuelles extrêmes 1 et 4 seraient de prime abord simultanément perspectives à l'une des ponctuelles 3 ou 2), et si P est l'intersection de P_1P_2 avec P_3P_4 (*fig.* 9, I),

Fig. 9, I.



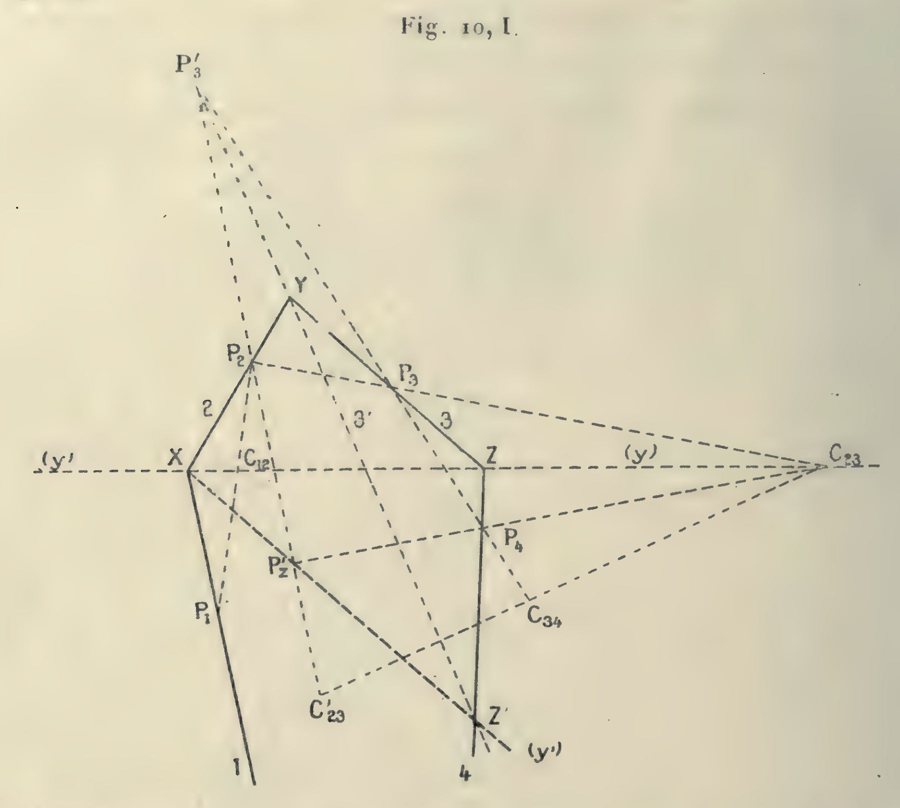
ce point, troisième sommet d'un triangle PP_2P_3 dont les deux autres sont unis aux supports 2 et 3, et dont les côtés sont unis aux centres alignés (C), décrit une ponctuelle (p) de support p concourant avec 2 et 3, à laquelle sont simultanément perspectives les ponctuelles extrêmes (1) et (4), par les centres respectifs C_{12} et C_{34}.

Supposons donc le centre C_{23} uni à la droite y, l'un au moins des deux autres, soit C_{34}, n'étant pas uni à cette droite (*fig.* 10, I).

Remplaçons le support 3 par un autre 3′, uni au point d'incidence Y de 2 et de 3 et au plan d'incidence de 3 et de 4, et ayant son point d'incidence sur le support 4 en Z′.

P'_3 étant la projection sur ce nouveau support $3'$ de P_3 par C_{34}, la droite $P_2 P'_3$, troisième côté du triangle $P_2 P_3 P'_3$ dont les sommets sont unis aux droites concourantes 2, 3, $3'$, *est unie à un point fixe* C'_{23} de $C_{23} C_{34}$.

Fig. 10, I.



Et ce nouveau point C'_{23} ne peut plus être uni à la nouvelle droite y' ou XZ', c'est-à-dire ne peut se confondre avec la trace P'_z de $P_2 P'_3$ sur XZ', la droite $P'_z P_4$ (unie à C_{23}, trace de son homologue $P_2 P_3$ sur l'axe d'homologie XZ des deux triangles $P_2 Y P_3$, $P'_z Z' P_4$, homologiques par le centre P'_3) étant une droite *variable* de la radiée de centre C_{23}. On est donc ramené au cas primitivement considéré (où le centre C_{23} n'est pas uni à la droite y). On voit d'ailleurs immédiatement ici que les ponctuelles P'_z et P_4 sont perspectives par le centre C_{23}, les ponctuelles P'_z et P_1 étant à leur tour perspectives par un centre C'_{1z} *uni à* $C_{12} C'_{23}$ ($P'_z P_1$, troisième côté du triangle $P'_z P_2 P_1$, etc.).

2° Supposons, *les quatre supports étant toujours distincts*, que trois supports consécutifs, soit 1, 2, 3, soient concourants. Alors, les ponctuelles (1) et (3) sont perspectives, et les ponctuelles extrêmes (1) et (4) sont simultanément perspectives à la ponctuelle (3); si les

quatre supports *distincts* étaient concourants, les ponctuelles extrêmes seraient perspectives.

3° Supposons, *les supports étant toujours distincts*, que trois d'entre eux, *dont deux ne sont pas consécutifs*, soit 1, 2, 4, *soient concourants*,

On remplacera (2), simultanément perspective à (1) et à (3), par une autre (2′), dont le support, incident aux supports 1 et 3, et distinct des quatre supports, ne concoure avec nulle paire de ces supports, et l'on est ramené au cas primitif.

4° Supposons que deux supports *non consécutifs*, soit 1 et 3, soient *confondus*, les deux autres non consécutifs, 2 et 4, étant *distincts* (deux ponctuelles *consécutives* ont par définition leurs supports *distincts et incidents*, et dans toute cette analyse du cas de quatre ponctuelles, les supports *extrêmes* sont supposés *distincts*).

Si 4 concourt avec 2 et le support commun aux ponctuelles (1) et (3), les ponctuelles (2) et (4) sont perspectives, donc les ponctuelles (1) et (4) le sont aussi.

Sinon, on remplacera 3 par un support 3′ *incident à* 2 *et à* 4 *et non uni aux points d'incidence de ces supports* 2 *et* 4 *sur le support commun à* (1) *et à* (3), et l'on est ramené au cas primitif.

5° Enfin, dernière hypothèse, les supports 2 et 4 sont confondus, ainsi que les supports 1 et 3.

Remplaçons 2 par 2′, concourant avec 1 et 2; les ponctuelles (1) et (2′) sont perspectives, de même les ponctuelles (2′) et (4); donc (1) et (4) sont aussi perspectives, 1, 2′, 4 étant *concourants*.

3. Considérons maintenant une chaîne de *cinq* ponctuelles consécutivement perspectives, et supposons tout d'abord que les deux ponctuelles extrêmes (1) et (5) *aient leurs supports distincts*.

Si 1 et 4 *ou si* 2 *et* 5 sont des supports *distincts*, la chaîne 1234 (*ou la chaîne* 2345) peut se réduire à trois termes; la chaîne totale se trouvant alors réduite à quatre termes, et ses ponctuelles extrêmes étant distinctes, peut finalement se réduire à trois termes.

Si les supports 1 et 4 sont confondus, ainsi que les supports 2 et 5, on remplacera le support 4 par un autre 4′, *non uni à nul sommet du triangle* 123, et la chaîne 1234′ se réduisant à trois termes, la chaîne 1234′5 se réduit (d'abord à quatre, puis) à trois termes.

Si maintenant nous supposons *confondus* les supports *extrêmes* 1

et 5, *les supports* 1 *et* 4 *étant alors nécessairement distincts*, la chaîne 1234 se réduit à trois termes, et par conséquent la chaîne totale se réduit à quatre termes.

Conclusion. — Il résulte finalement de cette analyse que *toute chaîne de ponctuelles consécutivement perspectives peut être ramenée à n'avoir, extrémités comprises, que trois termes si les supports extrêmes sont distincts, et que quatre termes si ces supports extrêmes sont confondus.* (Car les cinq derniers termes de toute chaîne se réduisent toujours à trois termes, ou à quatre termes.)

VII. — Détermination d'une collinéation restreinte entre deux ponctuelles.

1. Ponctuelles de supports non incidents. — 2. Ponctuelles de supports incidents; hexagones de Brianchon et de Pascal. — 3. Ponctuelles de même support.

1. D'après ce qui précède, deux ponctuelles de supports *distincts* sont en relation de collinéation restreinte *si elles sont simultanément perspectives à une même troisième.* (Si le point de concours de leurs supports, supposés incidents, est uni soit au support de la troisième, soit à la droite de jonction des deux centres respectifs de perspective, elles sont directement perspectives; et réciproquement, deux ponctuelles perspectives sont simultanément perspectives à une même troisième, dont le support arbitraire est simultanément *incident* aux supports des premières, c'est-à-dire, soit *concourant*, soit *coplanaire* avec ces supports.)

Supposons que les supports 1 et 2 des deux ponctuelles (1) et (2) *ne soient pas incidents*, le support y de la troisième ponctuelle (y) simultanément perspective étant *par définition incident* à chacun des deux supports 1 et 2.

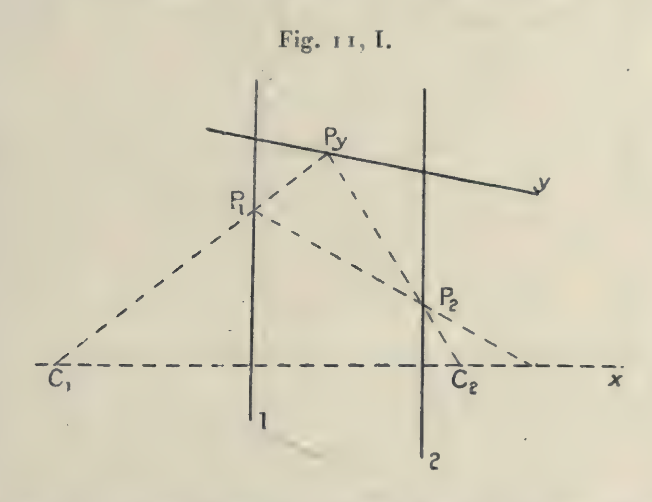
Le centre de perspective C_1 de (1) et de (y) est un point du plan ternaire (1, y), *extérieur à chacun des supports* 1 *et* y; le centre C_2 de (2) et de (y) est un point du plan ternaire (2, y) extérieur à chacun des supports 2 et y; ces deux plans étant *distincts*, la droite des centres C_1C_2 *n'est incidente à nul des trois supports* 1, 2, y.

Considérant un triple de points homologues P_1, P_y, P_2, des trois ponctuelles (1), (y), (2), (*fig.* 11, I), on voit que la droite P_1P_2 est *coplanaire*, donc *incidente*, à la droite C_1C_2 de jonction des

centres de perspective, laquelle, on vient de le dire, n'est incidente ni à 1 ni à 2.

La droite de jonction de points homologues de deux ponctuelles *de supports non incidents* en relation de collinéation restreinte, est donc incidente à une troisième droite fixe du plan quaternaire de leurs supports, *non incidente à nul de ces supports*. Réciproquement, les ponctuelles tracées sur deux supports rectilignes non incidents 1, 2, par une droite simultanément incidente à ces deux supports et à un troisième x non incident à nul des premiers, sont en relation de collinéation restreinte. Car, considérant un support auxiliaire y incident à 1 et à 2 *sans l'être à* x, les plans ternaires (y, 1) et (y, 2) rencontrent respectivement la droite x aux points C_1 et C_2, et le support y *porte une ponctuelle simultanément perspective aux ponctuelles* (1) *et* (2), *par les centres respectifs* C_1 *et* C_2.

Fig. 11, I.



On peut donc toujours établir entre deux ponctuelles de supports non incidents (et par suite, en vertu du caractère *équivalentaire* de la collinéation restreinte, entre deux ponctuelles de supports incidents, ou de même support) une relation de collinéation restreinte, où trois éléments donnés de l'une aient pour homologues trois éléments donnés de l'autre. Prenant un support arbitraire x *simultanément incident aux trois droites de jonction des trois paires de points homologues donnés*, la relation de collinéation établie entre les traces sur 1 et 2 d'une même droite simultanément incidente aux supports 1, 2, x, satisfait à la condition proposée.

Il va résulter maintenant de la proposition fondamentale du champ réglé de support quaternaire, c'est-à-dire de la proposition de Pappus,

que la relation de collinéation restreinte entre deux ponctuelles de supports non incidents est *univoquement définie* par la donnée de trois points de l'une et des trois points homologues de l'autre.

Car, considérant les trois droites de jonction de ces éléments homologues, et deux autres droites arbitraires x, z, simultanément incidentes à ces trois droites de jonction, et par conséquent non incidentes à nul des deux supports, les deux relations de collinéation restreinte définies entre les ponctuelles par la condition que les droites de jonction de leurs éléments homologues soient incidentes à l'une ou à l'autre des droites x ou z, coïncident, *puisque toute droite incidente aux deux supports et à l'une des deux droites x ou z, est nécessairement incidente à l'autre.*

La relation de collinéation restreinte entre deux ponctuelles (1), (2), de supports distincts et *incidents*, ou *de même support*, est encore univoquement définie par la donnée de trois points de l'une et des trois points homologues de l'autre. Car les deux ponctuelles, supposées en relation de collinéation restreinte, sont aussi (vu le caractère équivalentaire de la relation) en relation de collinéation restreinte avec une même troisième, de support arbitraire non incident à nul de leurs deux supports, sur lequel on s'est arbitrairement donné trois points, que l'on considère comme les homologues respectifs des éléments homologues donnés des premières ponctuelles, ce qui détermine univoquement une collinéation entre l'une des premières ponctuelles et la troisième, et une collinéation entre l'autre des premières et cette même troisième. *Les points homologues des ponctuelles* (1) *et* (2) *sont les points simultanément homologues d'un même point de la troisième dans ces deux collinéations.*

2. On peut d'ailleurs traiter directement le cas de ponctuelles *à supports distincts et incidents*, sans sortir du plan d'incidence de ces ponctuelles.

Éliminons d'emblée les deux cas singuliers de ponctuelles simultanément perspectives à une même troisième, où le point d'incidence de leurs supports est uni soit au troisième support (Desargues), soit à la droite de jonction des centres des deux perspectives (Pappus), cas où les deux ponctuelles sont directement perspectives.

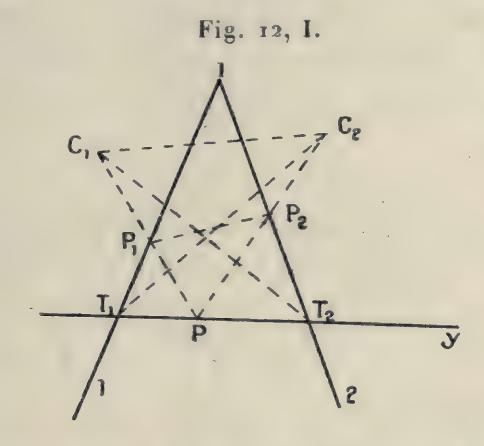
Soit IT_1T_2 le triangle des trois supports 1, 2, y (*fig.* 12, I). (I, point d'incidence des supports 1 et 2; T_1, T_2, traces sur 1 et 2 du support

y de la ponctuelle simultanément perspective, les centres respectifs de perspective étant C_1 et C_2, *non alignés avec le point* I, et chacun extérieur au support y ainsi qu'au support 1 ou 2 correspondant.)

P étant un point arbitraire de la ponctuelle y, les rayons C_1P, C_2P, rencontrent les supports 1 et 2 correspondants en P_1, P_2, et P_2 est l'élément de (2) homologue de l'élément P_1 de (1).

Considérons les deux rayons dont chacun, respectivement uni à chaque centre C_1 ou C_2, contient la trace du support y sur celui des deux supports 1 ou 2 *qui n'est pas associé au centre auquel est uni le rayon envisagé*, c'est-à-dire les deux rayons C_1T_2, C_2T_1. (D'après la réciproque de Pappus, ces deux rayons ne peuvent concourir sur la droite de jonction P_1P_2 de deux points homologues, puisque les trois points C_1, C_2, I, ne sont pas alignés.)

Fig. 12, I.



Un *hexagone* ayant pour côtés *dont nul triple n'est concourant* : les supports 1 et 2 des deux ponctuelles, la droite de jonction C_1C_2 des centres respectifs de perspective, les deux rayons dont chacun projette respectivement par chacun de ces centres la trace du support de la ponctuelle simultanément perspective sur celui des deux autres supports qui n'est pas associé au centre envisagé, et enfin une droite de jonction P_1P_2 de deux points homologues arbitraires; *savoir l'hexagone* $C_1T_2P_2P_1T_1C_2$ *a ses trois diagonales principales* (C_1P_1, T_2T_1, P_2C_2) *concourantes* (*en* P).

Un hexagone qui jouit de cette propriété s'appelle *un hexagone de Brianchon*.

Proposition fondamentale. — *Les droites susceptibles de former avec cinq droites données dont trois quelconques ne sont pas concourantes, un hexagone de Brianchon, forment un ensemble tel,*

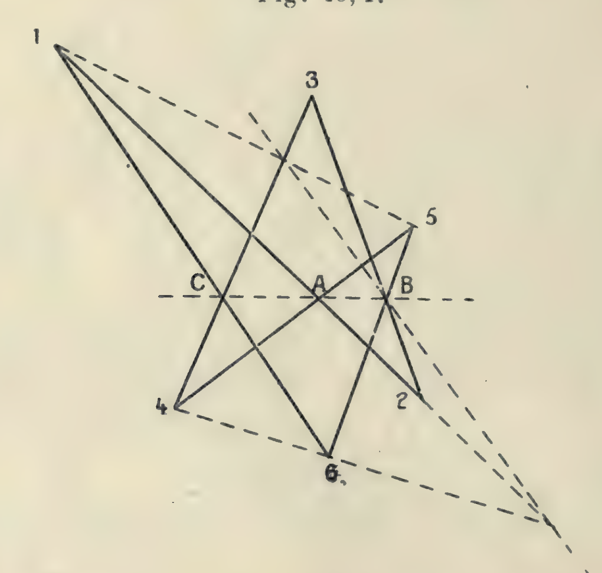
qu'en y comprenant ces cinq droites, cet ensemble soit aussi bien défini par cinq de ses droites arbitrairement choisies, trois droites arbitraires de l'ensemble n'étant jamais concourantes, et tout hexagone de six droites de l'ensemble ayant ses diagonales principales concourantes.

Nous allons donner plutôt les démonstrations *corrélatives* pour l'hexagone *corrélatif* de l'hexagone de Brianchon, c'est-à-dire pour *l'hexagone* dit *de Pascal*, caractérisé par la propriété d'avoir *ses points diagonaux principaux alignés* (autant pour la lecture plus facile des figures qu'à cause de l'importance historique prépondérante de l'hexagone de Pascal; le lecteur n'aura qu'à transposer dualistiquement les démonstrations).

Théorème I. — *Si un hexagone* 123456, de sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, *est pascalien, tout autre hexagone tel que* 123465, *déduit du premier par une transposition de deux sommets consécutifs, est aussi pascalien.*

A, B, C étant les points diagonaux principaux (*alignés*) de l'hexagone pascalien 123456 (*fig.* 13, I), il s'agit de montrer que les trois

Fig. 13, I.



points : [(1,2), (4,6)], [(3,4), (5,1)] et B {où [(*i*,*j*), (*k*,*m*)] représente le point de concours des droites de jonction des couples (*i*, *j*) et (*k*, *m*)}, *sont alignés.*

Or ces points *sont les points diagonaux principaux de l'hexagone de Pappus* 1564 CA. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Les *soixante hexagones* qui ont mêmes sommets qu'un hexagone de Pascal donné (y compris ce dernier) sont tous des hexagones de Pascal (car ils peuvent se déduire de l'hexagone donné par des transpositions répétées de sommets consécutifs).

L'hexangle (¹) *de leurs sommets sera dit aussi pascalien.*

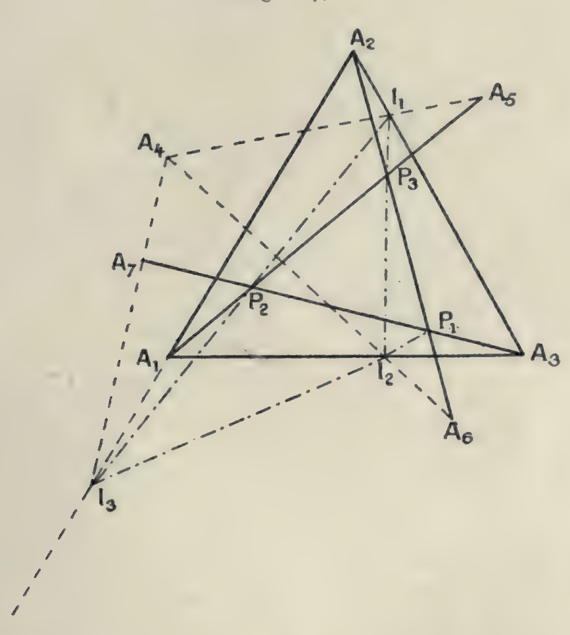
THÉORÈME II. — *Si deux* hexangles

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \quad \text{et} \quad A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_7,$$

ayant cinq sommets communs, sont pascaliens, tout hexangle, *tel que* $A_1 A_2 A_3 A_4 A_6 A_7$, *formé de quatre de leurs sommets communs, et de leurs sommets non communs, est aussi pascalien.*

Traçons le triangle $A_1 A_2 A_3$ (*fig.* 14, I); relions A_1 et A_5; A_2

Fig. 14, I.



et A_6; A_3 et A_7. Ces trois droites forment un triangle ayant pour sommets P_1, P_2, P_3. (Si ces trois droites sont concourantes, la démonstration subsiste, les trois notations de P_k désignant alors un même point P.)

(¹) Les définitions des termes *n-angle*, *n-latère*, *n-gone*, *diagonales*, *points diagonaux*, seront données aux Chapitres II et IV.

Par A_4, projetons chaque point A_5, A_6, A_7, sur le côté du triangle $A_1A_2A_3$ *opposé au sommet relié à ce point*, en I_1, I_2, I_3.

L'hexagone $A_1A_3A_2A_6A_4A_5$ étant *pascalien* par hypothèse, *ses points diagonaux principaux* I_2, I_1, P_3 *sont alignés.*

De même, I_3, I_1, P_2, *points diagonaux principaux* de l'hexagone *pascalien* $A_1A_2A_3A_7A_4A_5$, *sont aussi alignés.*

Les points I_3, P_1, I_2 sont alors les points diagonaux de l'hexagone de *Pappus* $I_1P_2A_3A_1A_2P_3$, *et sont donc aussi alignés.*

Mais ils sont aussi les points diagonaux principaux de l'hexagone $A_1A_2A_3A_4A_7A_3$; *ce dernier est donc aussi pascalien.*

C. Q. F. D.

Théorème III. — *Si trois sommets alternés d'un hexagone pascalien sont alignés, les trois autres sont aussi alignés.*

Car les trois premiers et les trois points diagonaux principaux de l'hexagone sont les sommets d'un hexagone de *Pappus*, dont les points diagonaux sont les trois autres sommets du premier hexagone.

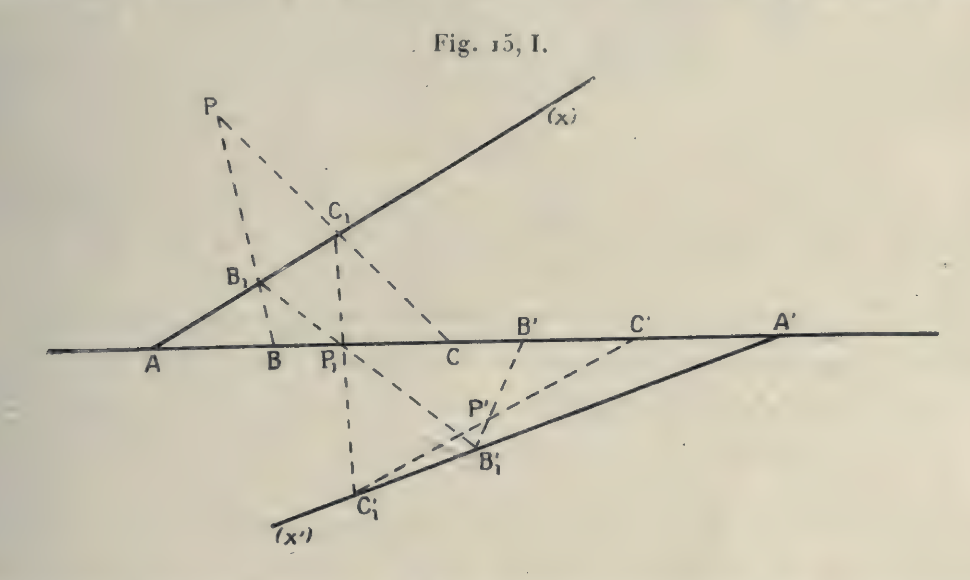
Revenant à la proposition fondamentale antérieure, chaque droite de jonction de deux points homologues de deux ponctuelles de supports distincts et incidents en relation de collinéation restreinte et *non perspectives*, devant former *un hexalatère de Brianchon* avec cinq droites données dont trois ne sont pas concourantes (les supports des deux ponctuelles, la droite de jonction des centres de perspective de chacune d'elles avec la troisième simultanément perspective, et les deux rayons unis chacun à l'un des deux centres et au point de concours du support de la troisième ponctuelle avec le support de celle des deux premières qui ne lui est pas associée dans la perspective par ce centre); leur ensemble, en y comprenant les cinq droites mentionnées, est tel que tout hexagone de six droites arbitraires de l'ensemble ait ses trois diagonales principales concourantes (cela résulte des propositions corrélatives des théorèmes I et II), trois droites de l'ensemble n'étant jamais concourantes (puisque, considérant un hexagone dont trois côtés alternés seraient trois droites concourantes de l'ensemble, et les trois autres, trois des cinq droites mentionnées, ces trois dernières devraient aussi être concourantes, d'après le corrélatif du théorème III).

Cet ensemble étant univoquement déterminé par cinq de ses droites arbitrairement choisies, la relation de collinéation restreinte entre

deux ponctuelles de supports distincts et incidents est univoquement définie par la donnée sur ces supports de trois paires d'éléments homologues; si les droites de jonction de ces paires sont concourantes, toutes les droites de jonction d'éléments homologues concourent avec celles-ci, et les deux ponctuelles sont en relation de perspective par ce point de concours; sinon, leur ensemble est déterminé par les trois droites de jonction des trois paires données et les deux supports; à tout point de l'un des supports qui n'a pas pour homologue le point de concours des supports, est attachée une et une seule droite de l'ensemble distincte de ce support, et dont la trace sur l'autre support est l'homologue de ce point.

Réciproquement, les ponctuelles tracées sur deux droites arbitraires d'un tel ensemble par les autres sont en relation de collinéation restreinte, les radiées qui par deux centres arbitraires, *dont la droite*

Fig. 15, I.



de jonction appartienne à l'ensemble, projettent ces deux ponctuelles, étant perspectives.

La proposition que la relation de collinéation restreinte entre deux ponctuelles est univoquement définie par la donnée de trois paires d'éléments homologues est équivalente au postulat de Pappus, et l'entraîne réciproquement, car elle entraîne la proposition fondamentale du champ réglé de support quaternaire, équivalente à ce postulat.

3. Pour déterminer l'un par l'autre des éléments homologues de deux ponctuelles *de même support* dont on donne trois paires (A, A′),

(B, B′), (C, C′), d'éléments homologues (deux au plus de ces paires peuvent avoir leurs éléments confondus, sans quoi tout élément est confondu avec son homologue), un procédé simple est le suivant :

Soient deux droites x, x', unies l'une à A, l'autre à A′, et *incidentes*. Joignons B et C à un point P du plan ternaire de ces droites extérieur à ces droites; B_1 et C_1 étant les traces de ces deux rayons sur x, projetons-les par un point arbitraire P_1 du support commun des deux ponctuelles sur x', en B'_1 et C'_1, et soit P′ le point de concours de $B'B'_1$ et de $C'C'_1$ (*fig.* 15, I). *Les éléments homologues des deux ponctuelles sont les perspectives, par les centres* P *et* P′, *de deux éléments homologues des ponctuelles de supports x et x', rapportées perspectivement par le centre* P_1.

VIII. — Détermination de la collinéation restreinte n-aire.

1. Collinéation restreinte des formes binaires. — 2. Généralisation de la proposition concernant le cas singulier de ponctuelles en collinéation restreinte. — 3. Collinéation restreinte n-aire. — 4. Extension à la collinéation générale.

1. La relation de collinéation restreinte entre deux formes binaires d'espèces quelconques est univoquement déterminée par la donnée de trois paires d'éléments constitutifs homologues arbitraires de ces formes. Car ces données déterminent univoquement sur deux droites reposant chacune sur le support de la forme correspondante, et chacune extérieure à l'axe de cette forme, deux ponctuelles en relation de collinéation restreinte, caractéristiques de ces formes.

2. Nous appelons « *configuration caractéristique* » ou « *configuration surabondante* » d'une forme linéaire n-aire donnée, un ensemble, soit de n, soit de $n+1$ éléments constitutifs de cette forme, *susceptible de déterminer sur un champ caractéristique de cette forme une configuration caractéristique, ou une configuration surabondante, de ce champ.*

On peut étendre au champ n-aire une proposition établie antérieurement (§ IV, 3) pour une paire de ponctuelles d'un champ ternaire.

Théorème. — *Dans un champ n-aire, si $n-1$ ponctuelles, de supports tous concourants, et formant une configuration caractéristique de la gerbe de droites intrinsèquement $(n-1)$-aire qui a*

son centre en leur point de concours, sont rapportées toutes à l'une d'elles (et par conséquent chacune à l'autre) par des collinéations restreintes telles que leur point de concours soit à lui-même son propre homologue dans toutes ces collinéations, le plan $(n-1)$-aire de jonction d'un ensemble de $n-1$ points simultanément homologues, est uni à un plan $(n-2)$-aire fixe.

La droite de jonction de deux points homologues A_j, A_k, des ponctuelles (j) et (k), par exemple, est unie (§ IV, 3) à un point fixe B_{jk} du plan ternaire des supports j et k, extérieur à chacun de ces supports. Le plan $(n-1)$-aire *variable* de jonction des $n-1$ points A_j contient donc le plan *fixe* de jonction des C^2_{n-1} points *fixes* B_{jk}, *lequel ne saurait avoir une polynarité inférieure à* $n-2$, puisque le plan de jonction de ces points B_{jk} et de l'un quelconque des $n-1$ supports binaires envisagés contient aussi tous les autres supports des ponctuelles, et se confond par conséquent avec le support n-aire de leur gerbe. C. Q. F. D.

On en déduit le théorème corrélatif et sa réciproque, qui seront plutôt utilisés :

Théorème corrélatif. — *Si, dans un champ n-aire, $n-1$ formes binaires de plans constitutifs $(n-1)$-aires, ayant pour axes $(n-2)$-aires, les $n-1$ bases $(n-2)$-aires d'une même configuration caractéristique $(n-1)$-aire, sont toutes rapportées à l'une d'elles (et par conséquent chacune à chaque autre) par des collinéations restreintes, de telle sorte que le plan $(n-1)$-aire de support de la configuration mentionnée soit à lui-même son propre homologue dans toutes ces collinéations, le point de concours d'un ensemble de $n-1$ plans $(n-1)$-aires simultanément homologues de ces formes, décrit une droite.*

Réciproquement, *si l'on suppose que le point de concours de $n-1$ plans $(n-1)$-aires constitutifs homologues de $n-1$ formes binaires ayant pour axes les $n-1$ bases $(n-2)$-aires d'une même configuration caractéristique $(n-1)$-aire d'un champ n-aire, décrive une droite, les collinéations restreintes alors établies entre ces formes simultanément rapportées à leur ponctuelle caractéristique commune décrite par le point envisagé, sont telles que le plan de support $(n-1)$-aire de la configuration*

(plan de jonction des axes des formes) soit dans toutes ces collinéations son propre homologue.

3. Proposition fondamentale de la collinéation restreinte. — *Une relation de collinéation restreinte entre deux formes linéaires n-aires est univoquement définie par la donnée de* $n+1$ *éléments constitutifs de l'une, formant une configuration surabondante de cette forme, et des* $n+1$ *éléments homologues constitutifs de l'autre, formant une configuration surabondante de cette dernière.*

Cette proposition étant admise pour toute paire de formes linéaires isopolynaires (iso ou dualisimilaires) *de polynarité intrinsèque inférieure à* n, supposons établie entre deux *champs ponctuels* n-aires C et C′ une relation de collinéation restreinte, où soient deux à deux associés les éléments de même indice $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$; $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$, de deux configurations surabondantes données (A) et (A′) de ces champs.

Entre les champs k-aires de deux arêtes homologues k-aires des deux configurations (arêtes de jonction de deux groupes de k sommets homologues) est alors établie une collinéation k-aire, univoquement définie par deux configurations surabondantes homologues de leurs supports k-aires, constituée chacune par les k sommets de chaque arête, et le point d'incidence de cette arête avec l'arête qui porte les $(n+1-k)$ autres sommets de la configuration (A) ou (A′) à laquelle appartient l'arête k-aire envisagée.

Entre deux formes *binaires* d'éléments constitutifs $(n-1)$-aires ayant pour axes deux arêtes homologues $(n-2)$-aires des deux configurations surabondantes (A) et (A′), est établie une collinéation binaire restreinte, définie par les deux triples de ces plans $(n-1)$-aires qui sont respectivement unis aux trois autres sommets de chaque configuration (A) ou (A′) extérieurs à l'axe $(n-2)$-*aire* de la forme binaire correspondante.

Considérant alors une configuration caractéristique $(n-1)$-aire X de la configuration (A), et la configuration caractéristique $(n-1)$-aire associée X′ de la configuration (A′), à tout point P du champ C, extérieur aux diverses *bases* de la configuration (A), doit être associé le point P′ du champ C′, intersection des $n-1$ plans $(n-1)$-aires

unis aux diverses *bases* $(n-2)$*-aires* de la configuration X′, et respectivement homologues des $n-1$ plans $(n-1)$-aires unis à P et aux diverses bases de la configuration X, dans les diverses collinéations restreintes établies entre les formes binaires deux à deux associées *qui ont pour axes les bases* $(n-2)$*-aires de la configuration* X *et les bases associées de la configuration* X′.

La relation *partout biunivoque* ainsi établie entre les points P et P′ est telle que si le point P décrit une ponctuelle, son associé P′ décrit aussi une ponctuelle, en relation de collinéation restreinte avec la ponctuelle de P.

Car les $n-1$ formes binaires mentionnées du champ C étant alors rapportées les unes aux autres (réciproque du théorème corrélatif) par C^2_{n-1} collinéations restreintes telles que le plan $(n-1)$-aire de jonction des axes de ces formes y soit dans toutes son propre homologue, *il en est de même pour les* $n-1$ *formes binaires associées du champ* C′, puisque, dans chacune des $n-1$ collinéations binaires qui rapporte l'une de ces dernières formes à la forme associée du champ C, les deux plans $(n-1)$-aires de jonction des deux systèmes d'axes de ces deux systèmes de formes sont des éléments homologues (supports des configurations X et X′).

(Bien distinguer les C^2_{n-1} collinéations entre les $n-1$ formes *du même champ* C, résultant de ce qu'elles sont simultanément rapportées à une même ponctuelle caractéristique décrite par le point P, et les $n-1$ collinéations qui rapportent chacune d'elles à la forme homologue du champ C′, ces dernières étant déterminées par la collinéation *n*-aire supposée établie entre les deux champs C et C′.)

Le point P′ est donc uni à une droite fixe, et la ponctuelle qu'il y décrit est en relation de collinéation restreinte avec la ponctuelle de P, puisque ces deux ponctuelles sont les ponctuelles caractéristiques de deux formes homologues des deux champs.

On a supposé *isosimilaires* les deux champs linéaires isopolynaires envisagés; s'ils étaient *dualisimilaires*, la même démonstration subsiste, en y modifiant légèrement les termes. La proposition fondamentale de la collinéation restreinte est donc établie pour toute paire de formes linéaires isopolynaires d'espèces quelconques, puisqu'elle est établie pour une paire de champs caractéristiques de ces formes.

4. Ainsi qu'on l'a déjà dit, il résultera du postulat de disposition polygonale à caractère projectif de l'ensemble des points d'une droite, qu'une configuration surabondante d'un champ ponctuel n-aire détermine univoquement dans ce champ un ensemble illimité d'éléments, dénommé *réseau n-aire de Möbius*, ensemble pouvant aussi bien être défini par l'une quelconque de ses configurations surabondantes, et dont les points peuvent être mis en correspondance biunivoque et réciproque avec l'ensemble des $(n - 1)$-uples ordonnés de nombres rationnels.

Il résultera donc de ce postulat que, pour toute collinéation *restreinte ou générale* entre deux champs n-aires, où se correspondent deux configurations surabondantes données de ces champs, la relation sera univoquement définie *au moins* entre les éléments homologues des deux réseaux déterminés par ces configurations (en envisageant comme homologues deux éléments déduits à partir de chacune des configurations par une même construction linéaire).

Les postulats de continuité, affirmant que l'ensemble des éléments d'un réseau n-aire de Möbius est *partout dense* dans le champ n-aire qui le porte et que tout point de ce champ est un *point-limite* de l'ensemble, entraînent, *pour la collinéation générale comme pour la collinéation restreinte*, la proposition fondamentale de la collinéation (si l'on suppose que la collinéation n'altère pas la continuité des ensembles auxquels elle s'applique, c'est-à-dire qu'elle transforme toujours l'élément-limite d'un ensemble d'éléments dans l'élément-limite de l'ensemble des éléments transformés des premiers), et font par conséquent coïncider ces deux sortes de collinéations, les collinéations générales devenant alors des collinéations restreintes.

IX. — Perspective et homologie.

1. Perspective. — 2. Homologie. — 3. Produit de deux homologies de même centre, ou de même plan axial, et configurations analogues aux figures polaires. — 4. Produit d'homologies équivalant à une homographie donnée. — 5. Note finale.

1. Étant donnés un plan n-aire P^n et un point O extérieur à ce plan, on appelle *perspective sur ce plan relativement au centre* O, d'un point arbitraire X du plan $(n + 1)$-aire (P^n, O), l'intersection de la droite OX avec le plan P^n.

Si le point X décrit dans le plan $(n+1)$-aire (P^n, O) un plan k-aire P_x^k *non uni au centre* O $(1 \leqq k \leqq n)$, sa perspective décrit dans le plan P^n un plan k-aire P^k, intersection de P^n avec le plan $(k+1)$-aire (P_x^k, O). (Si le plan P_x^k est uni au centre O, la polynarité de sa perspective, qui est alors son intersection avec le plan P^n, est diminuée d'une unité.)

En particulier, si le point X décrit un plan n-aire P_x^n non uni au centre O, sa perspective sur P^n décrit ce plan P^n, reposant sur le plan $(n+1)$-aire (P_x^n, O).

Dans ce cas, les plans P^n et P_x^n sont dits *rapportés perspectivement l'un à l'autre*, ou *en relation de perspective par le centre* O.

Deux champs iso-n-aires sont donc en perspective par un centre O, si, leurs supports étant distincts et ayant leur incidence maximée, reposant par conséquent simultanément sur un même support $(n+1)$-aire, leurs points constitutifs sont deux à deux associés par une relation biunivoque telle que la droite de jonction de deux éléments homologues soit unie à un point fixe O, *extérieur à chacun de leurs supports*, mais reposant sur leur plan $(n+1)$-aire de jonction.

Tout point de P_x^n se transforme par cette perspective en un point bien déterminé de P^n, les deux points étant alignés avec le centre O, et plus généralement, tout élément k-aire P_x^k de P_x^n en un élément iso-k-aire P^k de P^n, le plan de jonction des éléments P_x^k et P^k étant le plan $(k+1)$-aire uni à l'un d'eux et au centre O; ces deux éléments ont donc *toujours* pour intersection *un plan* $(k-1)$*-aire, qui appartient d'ailleurs au plan* $(n-1)$*-aire d'intersection de* P^n *et de* P_x^n.

Si nous faisons les perspectives sur P^n d'un plan P_x^n relativement à deux centres distincts O_1, O_2 [les deux plans n-aires et les deux centres sont supposés appartenir à un même plan $(n+1)$-aire], les perspectives X_1, X_2 sur P^n d'un même point X de P_x^n sont alignées avec la trace O de $O_1 O_2$ sur P^n (sur la droite d'intersection du plan P^n et du plan ternaire $O_1 O_2 X$).

Les perspectives iso-k-aires P_1^k, P_2^k d'un même élément k-aire P_x^k de P_x^n ont pour élément de jonction un plan $(k+1)$-aire uni à l'un d'eux et au point O, savoir le plan d'intersection de P^n et du plan $(k+2)$-aire (P_x^k, O_1, O_2); elles ont donc *toujours* une intersection $(k-1)$-aire, *laquelle repose d'ailleurs sur le plan* $(n-1)$*-aire d'intersection de* P^n *et de* P_x^n.

2. Nous arrivons ainsi à la notion d'une transformation des éléments d'un champ n-aire de support P^n en d'autres éléments de même espèce de ce même champ, transformation *partout biunivoque* caractérisée par les conditions suivantes :

1° Un point et son transformé sont alignés avec un point fixe O de ce champ (*centre*);

2° En général, l'intersection d'un élément k-aire du champ et de son transformé iso-k-aire est un plan $(k-1)$-aire *reposant sur un plan* $(n-1)$*-aire fixe* P^{n-1} *de* P^n, leur élément de jonction étant *un plan* $(k+1)$*-aire uni au centre* O.

Cette transformation s'appelle une *homologie*, le point fixe O et le plan fixe $(n-1)$-aire P^{n-1} sont le *centre* et le *plan axial* de cette homologie.

Les éléments unis au centre ou plan axial ne sont pas altérés par la transformation.

Une transformation homologique dans un champ de support P^n est univoquement définie si l'on donne le centre O et le plan axial P^{n-1} d'homologie, ainsi qu'un point X_1 et son transformé X_2 alignés avec le centre. Le transformé d'un point arbitraire Y_1 du champ est alors l'intersection Y_2 des droites OY_1 et ZX_2, Z étant la trace de X_1Y_1 sur le plan axial d'homologie.

Les éléments d'un plan P^n et leurs transformés suivant le mode qu'on vient de définir (dans ce dernier alinéa) *sans sortir de ce plan*, peuvent toujours être considérés comme les perspectives faites de deux points distincts extérieurs à P^n, mais reposant simultanément avec P^n sur un même plan $(n+1)$-aire P^{n+1}, des éléments d'un même plan n-aire P^n_x, reposant aussi sur ce plan $(n+1)$-aire.

Soient en effet dans P^n : O le centre et P^{n-1} le plan axial d'homologie; X_1, X_2, un point et son transformé qui servent à définir l'homologie; Y_1 un autre point, et Y_2 son transformé.

Soient O_1, O_2 deux points extérieurs au plan P^n, mais *alignés avec le centre* O.

Les droites O_1X_1, O_2X_2, reposant sur le plan *ternaire* d'incidence des droites O_1O_2 et X_1X_2 *incidentes en* O, ont un point d'incidence X; de même, O_1Y_1 et O_2Y_2 ont un point d'incidence Y.

Les trois droites XY, X_1Y_1, X_2Y_2, *deux à deux coplanaires sans l'être simultanément* (leurs plans ternaires de jonction 2 à 2

sont les plans $O_1X_1Y_1$, $O_2X_2Y_2$, OX_1Y_1, et l'on suppose que les deux paires de points X_1, Y_1; X_2, Y_2 n'aient pas été choisis sur la même droite unie à O), *sont concourantes.*

La droite XY, unie au point d'incidence de X_1Y_1 et de X_2Y_2, lequel *par définition* est uni au plan axial P^{n-1} de l'homologie, *est donc incidente à ce plan axial*, et leur plan de jonction (de XY et de ce plan axial) *est un plan n-aire* P^n_x ou (P^{n-1}, X).

Quand les points Y_1, Y_2 décrivent le plan P^n en satisfaisant à l'homologie, le point Y décrit le plan n-aire P^n_x ou (P^{n-1}, X), et les points Y_1, Y_2 sont les perspectives, par les centres respectifs O_1 et O_2, d'un même point Y de ce plan P^n_x. C. Q. F. D.

On peut encore considérer les éléments d'un plan P^n et leurs transformés par une homologie, comme les perspectives faites par un centre O extérieur à ce plan, des éléments correspondants de deux plans n-aires P^n_1 et P^n_2, reposant tous deux sur le plan $(n+1)$-aire (P^n, O), et qui sont eux-mêmes en perspective par un centre C.

En effet, deux points correspondants de ces deux plans auxiliaires sont alignés avec le centre C, et deux éléments arbitraires correspondants iso-k-aires de ces plans ont pour élément de jonction un plan $(k+1)$-aire uni au centre C de leur perspective, et pour élément d'intersection un plan $(k-1)$-aire reposant sur le plan d'intersection $(n-1)$-aire de ces deux plans P^n_1 et P^n_2.

Donc, les perspectives sur P^n (faites par le centre O) de deux points correspondants sont alignées avec la perspective du point C, et celles de deux éléments correspondants arbitraires k-aires auront leur intersection $(k-1)$-aire unie à un plan fixe P^{n-1}, perspective du plan $(n-1)$-aire d'intersection de P^n_1 et de P^n_2; le plan de jonction de ces perspectives k-aires étant un plan $(k+1)$-aire uni à la perspective du point C. C. Q. F. D.

La réciproque s'établirait aussi aisément.

Une homologie remarquable est l'*homologie involutive*, caractérisée par cette propriété que le transformé d'un élément se transforme à son tour en ce premier élément.

Il en sera question dans le Chapitre suivant.

Le centre et le plan axial de l'homologie peuvent être *unis*; une homologie à centre et plan axial unis s'appellera une *homologie parabolique*, ou *homologie de translation*.

Dans une homologie, le quadruple aligné formé par un point, son

transformé, le centre d'homologie, et la trace de leur droite d'alignement sur le plan axial, conserve un caractère projectif invariable. Car si l'on envisage un second quadruple analogue de support distinct, ces deux quadruples sont *perspectifs* (par le point de concours, *uni au plan axial*, de la droite qui joint les deux points et de celle qui joint leurs transformés).

Ce caractère projectif invariable est ce que l'on appelle le *caractère projectif de l'homologie envisagée.*

Une homologie *non parabolique* est univoquement définie par son centre, son plan axial et son caractère projectif.

3. Deux homologies *de même plan axial*, effectuées successivement (la transformation résultante s'appelle le *produit* de ces homologies, produit dépendant de l'ordre des facteurs) équivalent à une troisième homologie de même plan axial que les premières, et dont le centre est aligné avec les centres des premières.

Car si un point X a pour transformé X_1 par la première homologie, la droite XX_1 étant unie au centre C_1, et si X_1 a pour transformé X_2 par la seconde homologie, la droite X_1X_2 étant unie au centre C_2, soit C la trace de XX_2 sur la droite des centres C_1C_2. Considérant un nouveau point arbitraire Y, son transformé Y_1 par la première homologie, et le transformé Y_2 de Y_1 par la seconde homologie, les deux triangles XX_1X_2, YY_1Y_2, ont leurs sommets sur les trois droites XY, X_1Y_1, X_2Y_2, *concourantes sur le plan commun d'homologie*, leurs côtés XX_1, YY_1 étant unis au point C_1, et leurs côtés XX_2, YY_2 étant unis au point C_2. Le troisième côté YY_2 du triangle (Y) est donc uni au point C, trace de XX_2 sur C_1C_2, et centre d'une troisième homologie équivalente au produit des premières.

De même, le produit de deux homologies *de même centre* est une homologie de même centre, et dont le plan axial est uni à l'intersection des plans axiaux des premières.

Si les deux premières sont *paraboliques* (centre et plan axial unis), la troisième l'est aussi.

Trois configurations caractéristiques *n*-aires d'un même plan *n*-aire, dont les traces sur un même plan $(n-1)$-aire reposant sur le premier se confondent, *sont donc deux à deux homologiques* (§ III, 3), *les trois centres de ces homologies étant alignés*.

L'ensemble des éléments constitutifs de ces trois configurations,

des plans de jonction deux à deux de leurs éléments homologues (unis à l'un des centres), des plans d'intersection de ces éléments deux à deux (reposant sur le plan axial commun), forme une configuration qui est une première généralisation de la figure polaire (§ III, 4), car elle peut être considérée comme la *trace* sur son plan n-aire d'une configuration *plus que surabondante d'un plan* $(n+1)$*-aire supportant le premier, constituée par les éléments de jonction de* $n+3$ *points de ce plan* $(n+1)$*-aire, tels que* n *quelconques d'entre eux ne reposent pas simultanément sur un plan de polynarité inférieure à* n.

La figure polaire étant représentée par le symbole $g(n, n+2)$, la nouvelle figure se représentera par le symbole $g(n, n+3)$, et l'on désignera en général par le symbole $g(n, n+p)$ la configuration d'un plan n-aire qui est la trace sur ce plan des éléments de jonction 2 à 2, ..., k à k, de $n+p$ points d'un même plan $(n+1)$-aire supportant le premier, n points quelconques des $n+p$ points envisagés n'appartenant pas simultanément à un plan de polynarité inférieure à n.

Les éléments d'une telle figure peuvent être notés comme il l'a été fait pour la figure polaire. Chacun de ses points peut être affecté d'une combinaison *binaire*, et chacun de ses éléments k-aires d'une combinaison $(k+1)$-aire de $n+p$ indices variant de 1 à $n+p$, de telle sorte que tout élément k-aire supporte tout élément de polynarité inférieure affecté d'une combinaison dont tous les indices figurent dans la combinaison attachée à cet élément k-aire, et repose sur tout élément de polynarité supérieure affecté d'une combinaison contenant tous les indices de la combinaison de l'élément k-aire.

De même, trois configurations caractéristiques d'un même plan n-aire, dont les sommets sont alignés trois à trois avec un centre fixe, sont deux à deux homologiques, de telle sorte que les trois plans axiaux de ces homologies soient unis à un même plan $(n-2)$-aire; elles forment, avec le centre commun, les trois plans axiaux, et l'ensemble des éléments de jonction et d'intersection de leurs éléments homologues une configuration $G(n, n+3)$, *n-airement corrélative de la configuration* $g(n, n+3)$, et peut être considérée comme la projection sur son support n-aire P^n, faite par un point extérieur O, des divers éléments d'intersection (de polynarités variables de $n-1$ à 1) de $n+3$ plans n-aires, reposant

sur le plan $(n+1)$-aire (P^n, O), et tels que nul système de $n+1$ d'entre eux n'ait un point à tous commun.

4. Toute transformation homographique restreinte dans le champ n-aire équivaut à un produit d'homologies effectuées dans ce champ.

Il suffit d'établir que l'on peut toujours, par un produit d'homologies, transformer une configuration surabondante n-aire donnée en une autre configuration surabondante donnée de même support.

Montrons d'abord que l'on peut toujours, par un produit *de trois homologies au plus* effectuées dans un plan ternaire, transformer un quadrangle $A_0A_1A_2A_3$ de ce plan en un autre quadrangle $B_0B_1B_2B_3$ de ce même plan.

Une première homologie d'axe arbitraire et de centre uni à A_0B_0 transformera A_0 en B_0, les trois autres points (A) se transformant en A'_1, A'_2, A'_3. Considérant deux droites x et x', unies à B_0, les droites qui joignent les traces sur x' des côtés du triangle $A'_1A'_2A'_3$ aux traces sur x des côtés homologues du triangle $B_1B_2B_3$ forment un triangle $C_1C_2C_3$, homologique (axe x') au triangle (A'), et homologique (axe x) au triangle (B). Donc, *sans altérer le point* B_0, une deuxième homologie d'axe x' transforme le triangle (A') en (C), et une troisième homologie d'axe x transforme (C) en (B).

Si les droites qui joignent les traces X'_1, X'_2, X'_3, sur x' des côtés de (A') aux traces X_1, X_2, X_3, sur x des côtés de (B) [côtés du triangle (C)] étaient concourantes, on envisagerait, par exemple, au lieu de x, une autre droite y unie à B_0, et Y_1, Y_2, Y_3 étant les traces sur cette droite des côtés du triangle (B), les droites X'_1Y_1, X'_2Y_2, X'_3Y_3, *côtés du nouveau triangle* (C), ne sont plus concourantes. Car si elles l'étaient, les deux triples X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3, étant alors *perspectifs au même troisième* X'_1, X'_2, X'_3, et leurs supports x, x', y, étant concourants, *seraient perspectifs l'un à l'autre*, et les droites de jonction de leurs points homologues, *côtés du triangle* (B), seraient concourantes, ce qui n'est pas.

La proposition générale étant admise pour le champ $(n-1)$-aire, soient deux configurations surabondantes n-aires (A), (B) de même support, de sommets respectifs $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$.

Par une première homologie de plan axial arbitraire et de centre uni à la droite A_0B_0, nous pouvons transformer A_0 en B_0, la configu-

ration (A) se transformant alors en une autre configuration (A′), ayant pour sommets $(B_0, A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$.

Considérons alors dans un plan $(n-1)$-aire, reposant sur le plan n-aire envisagé, et non uni à nul sommet des configurations (A′) et (B), les deux configurations surabondantes $(n-1)$-aires *formées par les deux n-uples de traces des deux n-uples d'arêtes binaires toutes unies au sommet* B_0, *des deux configurations* (A′) *et* (B); par un produit de k homologies effectuées dans ce plan $(n-1)$-aire, la première peut être transformée dans la seconde.

Envisageons les k homologies n-aires, de mêmes centres respectifs que les k homologies $(n-1)$-aires, dont les plans axiaux, *tous unis au sommet commun* B_0 *de* (A′) *et de* (B), sont unis chacun respectivement au plan axial de l'homologie $(n-1)$-aire de même centre, et qui transforment chacune le champ $(n-1)$-aire *de la même manière que l'homologie* $(n-1)$*-aire de même centre.*

Leur produit transforme la configuration *caractéristique*

$$(A'_1, \ldots, A'_n)$$

en une autre $(A''_1, \ldots, A''_n)$, *homologique, par le centre* B_0, *à la configuration caractéristique* $(B_1, \ldots, B_n)$, et n'altère pas le point B_0. Une dernière homologie ayant ce point pour centre le laissera inaltéré, et fera finalement coïncider les deux n-uples $(A''_1, \ldots, A''_n)$ et $(B_1, \ldots, B_n)$. C. Q. F. D.

Toute projectivité restreinte est donc une projectivité *Poncelet*, toute corrélation restreinte dans le plan n-aire est le produit d'une projectivité Poncelet et d'une corrélation fixe arbitraire (par exemple une corrélation *Pappus*; telle, dans le cas de *n pair*, la réciprocité polaire spéciale à éléments correspondants unis).

La démonstration donnée conduit pour le plan n-aire, à *deux homologies de plus* que pour le plan $(n-1)$-aire; en réalité, *une seule homologie de plus peut suffire*. Il en résultera que toute homographie n-aire équivaut à un produit *de n homologies au plus.*

N'effectuons pas la première homologie transformant A_0 en B_0; et, admettant que l'on puisse transformer une configuration surabondante $(n-1)$-aire en une autre de même support par un produit de $n-1$ homologies, considérons sur un plan $(n-1)$-aire arbitraire non uni à nul sommet des deux configurations données (A) et (B) (et reposant sur leur support n-aire), les deux n-uples de traces

des deux n-uples de droites-arêtes des configurations (A) et (B), unies les unes au sommet A_0, les autres au sommet B_0.

$O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$, étant les centres des $n - 1$ homologies $(n - 1)$-aires (rangées dans l'ordre où elles sont effectuées) qui transforment le premier n-uple dans le second, *supposons construite une chaîne de $n - 1$ droites $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ telle que deux droites consécutives de la chaîne soient incidentes et que chaque droite d_k soit unie au centre O_k, les droites extrêmes d_1 et d_{n-1} étant en outre unies la première à A_0 et la dernière à B_0.*

Soient $X_2, X_3, X_4, \ldots, X_{n-1}$, les points d'incidence consécutifs des droites (d); A_0 et X_2 sont alignés avec O_1; X_k et X_{k+1} sont alignés avec O_k; X_{n-1} et B_0 sont alignés avec O_{n-1}.

Nous prendrons chacune des $n - 1$ homologies n-aires toujours de même centre O_k que l'une des homologies $(n - 1)$-aires, son plan axial étant uni au plan axial de cette dernière, transformant de la même manière que cette dernière le champ $(n - 1)$-aire qui contient les $n - 1$ centres, et nous achèverons de la déterminer, *non plus en unissant son plan axial au point* B_0, mais par la condition que cette homologie n-aire de centre O_k transforme X_k en X_{k+1} (la première de ces homologies transformera A_0 en X_2, et la dernière, X_{n-1} en B_0). Un point de son plan axial $(n - 1)$-aire est le point de concours d'une droite joignant X_k à un point arbitraire du plan $(n - 1)$-aire des centres, avec la droite joignant le transformé de ce dernier [par l'homologie $(n - 1)$-aire de centre O_k] au point X_{k+1}.

Par le produit de ces $n - 1$ homologies n-aires, le sommet A_0 de la première configuration surabondante n-aire est amené en B_0, sa configuration caractéristique restante se transformant en une autre *homologique, par le centre* B_0, *à la configuration caractéristique restante de la seconde*, et une n-ième homologie de centre B_0 fait finalement coïncider les deux configurations.

La chaîne de droites (d) envisagée est d'ailleurs univoquement déterminée, si les $n + 1$ points $A_0, O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}, B_0$, forment une *véritable* configuration surabondante n-aire, c'est-à-dire si, les $n - 1$ centres O_k formant une *véritable* configuration caractéristique $(n - 1)$-aire, la droite A_0B_0 n'est incidente à nulle *base* de cette configuration. On voit alors en effet, immédiatement, que la droite d_k est l'intersection du plan $(k + 1)$-aire $A_0O_1O_2\ldots O_k$, et du plan $(n - k + 1)$-aire $O_kO_{k+1}\ldots O_{n-1}B_0$.

Mais si les $n+1$ points mentionnés ne forment pas une configuration surabondante, certains centres non consécutifs pouvant même coïncider, ce procédé peut entraîner des discussions, de sorte qu'il vaut mieux opérer autrement.

Nous allons montrer que, dans le champ n-aire, un produit de plus de n homologies se ramène à un produit d'un nombre moindre d'homologies, et par conséquent à un produit de n homologies au plus.

Supposons démontrée cette proposition fondamentale : *Le produit de deux homologies n-aires est équivalent au produit de deux autres homologies dont les centres sont alignés sur la droite des centres des premières, l'un de ces derniers centres, soit le premier, soit le second, pouvant être choisi arbitrairement sur cette droite.*

Considérons trois homologies n-aires H_1, H_2, H_3, de centres *alignés* O_1, O_2, O_3 ; remplaçons le produit $H_1 H_2$ par $H'_1 H'_2$, H'_2 ayant son centre en O_3 et H'_1 ayant son centre sur la droite des centres. Le produit $H'_2 H_3$ de deux homologies *de même centre* O_3 équivalant à une homologie de même centre (§ IX, 3), le produit $H_1 H_2 H_3$ équivalent à $H'_1 (H'_2 H_3)$ est ramené à un produit de deux homologies.

Considérons un produit de *quatre* homologies n-aires $H_1 H_2 H_3 H_4$, *trois homologies consécutives n'ayant pas leurs centres alignés, sans quoi la réduction serait immédiate.* Supposons que le centre O_4 de la quatrième homologie soit uni au plan ternaire $O_1 O_2 O_3$ des centres des premières. Si O est la trace de $O_3 O_4$ sur $O_1 O_2$, nous remplacerons le produit $H_3 H_4$ par le produit $H'_3 H'_4$, de telle sorte que H'_3 ait son centre en O ; alors le produit $H_1 H_2 H_3 H_4$ est équivalent au produit $(H_1 H_2 H'_3) H'_4$, et le produit $H_1 H_2 H'_3$ de trois homologies *de centres alignés* se ramenant à un produit de deux homologies, le produit primitif se ramène à un produit de trois homologies.

Supposons établi *pour toute valeur de k inférieure ou égale à n*, qu'un produit de k homologies n-aires dont les centres ne forment pas une configuration caractéristique k-aire, c'est-à-dire reposent sur un plan de polynarité inférieure à k, puisse toujours se réduire à un produit d'un nombre moindre d'homologies.

Si l'on considère un produit de $n+1$ homologies n-aires $H_1 \ldots H_{n+1}$, de centres $O_1, \ldots, O_{n+1}$ (les centres des n premières formant une configuration caractéristique n-aire, sans quoi la réduction se ferait immédiatement) et si O est la trace de $O_n O_{n+1}$ sur le plan $(n-1)$-aire

des centres des $n-1$ premières, on peut remplacer le produit $H_n H_{n+1}$ par $H'_n H'_{n+1}$, H'_n *ayant son centre en* O. Alors, le produit $H_1 H_2 \ldots H_{n-1} H'_n$ se ramenant à un produit de moins de n homologies, le produit $H_1 H_2 \ldots H_n H_{n+1}$ équivalent au produit $(H_1 H_2 \ldots H_{n-1} H'_n) H'_{n+1}$ se ramène à un produit de n homologies au plus. C. Q. F. D.

Quant à la proposition fondamentale sur laquelle on s'est appuyé, en voici un aperçu de démonstration que le lecteur saisira mieux après la lecture du Chapitre consacré aux homographies binaires :

Le produit de deux homologies détermine sur la droite des centres une *homographie binaire* (nous envisageons seulement le cas général où nul des deux centres n'est uni à nul des deux plans axiaux).

Supposons qu'on veuille les remplacer par un produit équivalent où l'une des homologies, par exemple la première, ait son centre en un point O de la droite des centres $O_1 O_2$. Considérons l'homographie binaire *adhérente à l'homographie binaire mentionnée, et qui transforme* O_1 *en* O, homographie toujours univoquement déterminée, *sauf si* O_1 *ou* O *est un point principal de la première*. Éliminant aussi ce dernier cas, *les centres des deux nouvelles homologies seront les transformés des centres des premières par la seconde homographie binaire, leurs plans axiaux seront unis à l'intersection des plans axiaux des premières, et les traces de ces plans sur la droite des centres seront les transformés, par cette seconde homographie, des traces des plans axiaux des premières. On donnera aux nouvelles homologies le même caractère projectif respectif que les premières, et leur produit sera équivalent au produit des premières.*

Si dans une homographie n-aire on connaît *un point double et le plan double correspondant*, le produit d'homologies équivalent peut être ramené à n'avoir plus que $n-1$ facteurs; leurs centres, unis au plan double, sont les centres de $n-1$ homologies $(n-1)$-aires dont le produit équivaut à l'homographie $(n-1)$-aire déterminée sur ce plan par l'homographie n-aire; leurs caractères projectifs sont les mêmes que ceux des homologies $(n-1)$-aires correspondantes, et leurs plans axiaux, tous unis au point double, sont respectivement unis au plan axial $(n-2)$-aire de l'homologie $(n-1)$-aire correspondante.

Les produits de $n-k$ homologies, où $k>1$, sont des homogra-

phies *particulières;* pour une telle homographie, il y a un plan k-aire P^k (*commun aux $n-k$ plans axiaux*) tel que tout élément reposant sur ce plan ne soit pas altéré par la transformation, et un plan $(n-k)$-aire P^{n-k} (*plan de jonction des $n-k$ centres*), tel que tout élément supportant ce plan ne soit pas non plus altéré. Réciproquement, toute homographie pourvue de l'un des éléments P^k est aussi pourvue de l'autre P^{n-k}, et est un produit de $n-k$ homologies.

Ainsi, dans le plan quaternaire, une homographie qui a une droite de points doubles et une droite de plans doubles, est le produit de deux homologies dont les centres sont unis à la droite des plans doubles, et les plans axiaux à la droite des points doubles.

5. *Note finale.* — La Géométrie du champ n-aire (y compris le cas du champ ternaire, une fois admise la proposition de Desargues) peut s'établir sans faire intervenir d'élément extérieur au support.

Néanmoins, certaines propriétés deviennent plus immédiates si l'on considère les éléments de ce champ comme *traces*, ou comme *projections* d'éléments reposant sur un plan $(n+1)$-aire, supportant le champ n-aire envisagé. Pour certaines définitions, on peut avantageusement faire intervenir des plans de polynarité quelconque.

Ainsi, nous définirons la *série ponctuelle générale d'ordre k du plan n-aire* ($k > n$) comme l'ensemble des points de ce plan *dont les k transformés par k homographies k-aires, effectuées dans un plan k-aire supportant le plan n-aire envisagé, reposent simultanément sur un plan de polynarité inférieure à k.*

La série ponctuelle d'ordre $n-1$ de ce plan n-aire sera *l'ensemble des points de concours de $n-1$ plans simultanément homologues de $n-1$ gerbes de plans $(n-1)$-aires, deux à deux homographiques.*

La série ponctuelle générale n-aire du second ordre sera *l'ensemble des points de concours des éléments homologues de deux gerbes collinéaires, l'une de droites, l'autre de plans $(n-1)$-aires.*

Dans la définition des *polaires successives* d'un point relativement à une série générale d'ordre k d'un champ n-aire, on fera aussi intervenir, lorsque $k > n$, des éléments de polynarité supérieure à celle du champ de support de la série :

Considérant k points alignés et un autre point O de leur droite, soit k plans $(k-1)$-aires unis chacun à l'un des k points, et formant

une configuration caractéristique k-aire; les projections par O de chaque sommet de cette configuration sur la base opposée forment une seconde configuration *homologique de la première par le centre* O, et le plan axial $(k-1)$-aire de cette homologie dénommé *plan polaire k-linéaire de* O *relatif à la première configuration*, est uni à un point fixe O_1 de la droite des k points, quand les plans $(k-1)$-aires varient, en restant respectivement unis aux k points envisagés. Ce point fixe O_1 est la *dernière polaire de* O *relative au k-uple envisagé.*

Relativement à ce même k-uple, il y a $k-1$ points (O_{k-1}) qui admettent le point O *pour dernière polaire;* leur $(k-1)$-uple sera *la première polaire de* O *relative au k-uple donné.* Ayant obtenu la p-ième polaire de O, la première polaire de O relative à cette p-ième polaire sera la $(p+1)$-ième polaire de O relative au k-uple donné; la q-ième polaire de O relative à sa q-ième polaire coïncidera d'ailleurs avec sa $(p+q)$-ième polaire relative au k-uple donné.

Considérant alors une série générale n-aire d'ordre k, une droite arbitraire issue d'un point O rencontre celle-ci en k points, et les divers p-uples de points $(1 \leq p \leq k)$ qui sont les polaires successives de O relatives au k-uple d'indicence, décrivent des séries n-aires d'ordre p, qui sont les polaires successives de O relatives à la série d'ordre k envisagée.

CHAPITRE XII.

ÉTUDE DE L'HEXANGLE ET NOTATION DE SES ÉLÉMENTS.

1. Un *hexangle véritable* est l'ensemble de *six points* d'un même plan ternaire, dont trois quelconques ne soient pas alignés.

Ces points sont les *sommets* de l'hexangle; les $\frac{6.5}{2} = 15$ droites de jonction des sommets deux à deux en sont les *côtés*, et les $\frac{1}{2} \cdot \frac{6.5}{2} \cdot \frac{4.3}{2} = 45$ points d'intersection (autres que les sommets) des côtés deux à deux en sont les *points diagonaux*.

Deux *côtés* seront dits *unis* ou *séparés* suivant qu'ils sont ou non *unis à un même sommet de l'hexangle*.

On appellera *doublet* (de côtés) l'ensemble *de deux côtés unis* (le *centre* du doublet est *un sommet* de l'hexangle); une *paire* (de côtés) sera l'ensemble de deux côtés *séparés* (le *centre* d'une paire est *un point diagonal*).

Chaque point diagonal de l'hexangle définissant univoquement une paire ayant son centre en ce point, *il y aura 45 paires*.

Un ensemble de *trois côtés deux à deux séparés* formera un *trilatère* de l'hexangle; *les trois côtés d'un même trilatère contiennent donc les six sommets de l'hexangle*. Une paire appartient *à un*

unique trilatère, dont le troisième côté unit les sommets de l'hexangle extérieurs aux côtés de la paire; *deux trilatères distincts n'ont donc nul sommet* (de leurs triangles) *commun*. Chaque trilatère contenant *trois paires*, il y aura $\frac{45}{3} = 15$ *trilatères*.

L'ensemble de deux trilatères de l'hexangle offre *toujours* l'un ou l'autre de deux caractères distincts : ou bien ils n'ont *nul côté commun*, et alors ils seront dits *séparés*, ou bien ils ont *un unique côté commun*, et alors ils seront dits *unis*.

De même que chaque trilatère *contient trois côtés* de l'hexangle (deux à deux *séparés*), chaque côté *appartient à trois trilatères* (deux à deux *unis*) : les trois *paires* qui achèvent respectivement ces trilatères sont les trois paires *de côtés opposés* du quadrangle des quatre sommets de l'hexangle extérieurs au côté envisagé.

D'ailleurs, de même que trois côtés deux à deux *separés* sont réunis par *un même et unique trilatère*, trois trilatères deux à deux *unis* le sont toujours *par un seul et même côté*. Car deux côtés *distincts*, qui appartiennent respectivement à l'un et à l'autre de deux trilatères *unis* et soient distincts de leur unique côté commun, étant deux côtés *non opposés* du quadrangle précédent, sont toujours *unis* (à un même sommet de l'hexangle) et ne sauraient appartenir à un même troisième trilatère.

Déjà se manifeste la remarquable analogie de l'ensemble des 15 côtés de l'hexangle et de l'ensemble de ses 15 trilatères, si l'on a soin de faire correspondre à des *côtés unis* des *trilatères séparés* et réciproquement. Cette analogie, qui sera mise en pleine évidence, nous permettra de transporter aux trilatères la désignation habituelle des côtés de l'hexangle, d'où résultera pour les éléments de l'hexangle (côtés, points diagonaux, trilatères, hexagones) une notation particulièrement appropriée, *véritable clef de la question*, qui met en évidence, *sans l'aide de figures*, les propriétés de l'ensemble des hexagones du même hexangle.

Nous appelons *n-angle* de l'hexangle l'ensemble de n de ses sommets distincts ($1 \leqq n \leqq 6$); au lieu de *biangle*, on dira *couple*.

L'hexangle a 6 *pentangles* distincts, *complémentaires* respectifs de chacun des six sommets; 15 *quadrangles*, complémentaires respectifs de chacun des 15 *couples de sommets*; 20 *triangles*, qui forment *dix paires de triangles complémentaires* (un k-angle et un

p-angle du même hexangle sont dits *complémentaires* s'ils n'ont nul sommet commun, et si $k+p=6$, l'ensemble de leurs sommets comprenant donc les six sommets de l'hexangle).

2. Il y a 60 *hexagones* de même hexangle donné; chacun d'eux est défini par *une permutation hexagonale* des sommets de l'hexangle (on appelle *permutation n-gonale* de n éléments, un ensemble de n *combinaisons binaires* de ces éléments, choisi tel que chaque élément figure dans *deux* combinaisons, et que tout groupe de k combinaisons de l'ensemble, en nombre k inférieur à n, renferme plus de k de ces éléments).

Deux éléments *d'une même combinaison binaire* de la permutation hexagonale étant dits *juxtaposés*, chaque sommet d'un hexagone a deux sommets à lui juxtaposés. Une droite de jonction de deux sommets juxtaposés est un *côté* de l'hexagone (et aussi de l'hexangle); à chaque sommet sont unis deux côtés, et si l'on considère comme juxtaposés deux côtés unis à un même sommet, il en résulte aussi pour les six côtés une permutation hexagonale, laquelle définit aussi bien l'hexagone, si l'on s'est donné non l'hexangle de ses sommets, mais l'*hexalatère* de ses côtés.

Deux sommets *juxtaposés à un même troisième* sont dits *alternés*; un hexagone a *deux triples* de sommets alternés, deux sommets quelconques d'un même triple étant alternés; nous les appellerons *les deux triangles de l'hexagone*. Les *côtés* de ces triangles s'appellent *les diagonales secondaires* de l'hexagone, et ces triangles sont deux triangles *complémentaires* de l'hexangle.

A chaque sommet d'un hexagone correspond un unique sommet qui ne lui soit ni juxtaposé, ni alterné : deux tels sommets seront dits *opposés*, et leur droite de jonction est une *diagonale principale* de l'hexagone. Un hexagone a *trois paires* de sommets opposés et *trois* diagonales principales; relativement à l'un de ses hexagones, les cinq côtés de l'hexangle unis à un même sommet sont : 2 côtés, 2 diagonales secondaires, 1 diagonale principale de cet hexagone.

Les six *côtés* de l'hexagone se partagent également soit en trois *paires de côtés opposés* (les *centres* de ces paires sont *les trois points diagonaux principaux* de l'hexagone), soit en *deux triples de côtés alternés*, que nous appellerons *les deux trilatères de structure de l'hexagone* (ce sont deux trilatères de l'hexangle *séparés*).

Les *sommets* de ces trilatères sont *les points diagonaux secondaires* de cet hexagone.

Nous appelons *paire de diagonales secondaires* l'ensemble de deux diagonales secondaires qui soient respectivement *opposées*, dans les *triangles* de l'hexagone auxquels elles appartiennent, à deux *sommets opposés* de l'hexagone. Deux telles diagonales secondaires n'appartenant pas simultanément à un même triangle, les quatre sommets qui leur sont unis sont *distincts*, et chaque sommet uni à l'une est l'*opposé* d'un sommet uni à l'autre. Les autres droites de jonction de ces quatre sommets forment alors *une paire* de côtés opposés, et *une paire* de diagonales principales; ces trois paires de droites seront dites *correspondantes*, et la troisième diagonale principale (qui porte les deux autres sommets) sera dite *opposée* à chacune de ces paires.

De même, deux points diagonaux secondaires *d'une même paire* seront tels que les côtés opposés à ces deux points dans les *trilatères* de l'hexagone, soient deux côtés opposés de l'hexagone.

Si l'on considère deux trilatères de l'hexangle *séparés*, chaque côté de l'un unissant deux sommets de l'hexangle non unis à un même côté de l'autre, est *uni* à *deux* côtés de l'autre, et *séparé* du troisième côté de cet autre; à chaque côté de l'un correspond donc *un unique côté de l'autre, qui soit séparé du côté envisagé du premier.*

Les éléments de deux trilatères *séparés* sont ainsi associés par l'intermédiaire de l'hexangle en *paires d'éléments* qui seront dits *homologues*, *deux côtés homologues* étant *séparés*, et deux sommets *homologues* étant respectivement *opposés* à deux côtés homologues.

Deux trilatères de l'hexangle *séparés* définissent univoquement un *hexagone* de cet hexangle, dont ils sont *les trilatères de côtés alternés*, deux côtés *homologues* de ces trilatères étant *opposés* dans l'hexagone, deux côtés *non homologues* y étant juxtaposés, et deux sommets homologues formant une *paire* de points diagonaux secondaires de cet hexagone.

(Un hexagone dont l'hexangle n'est pas donné est univoquement défini par ses deux trilatères, et l'association des côtés de ces trilatères en paires de côtés homologues. Ainsi, les deux trilatères *abc*, *def*, supposés sans sommet ni côté commun, où les côtés de même rang sont supposés homologues et doivent être opposés dans l'hexagone, définissent l'hexagone représenté par la permutation hexa-

gonale *afbdce*, où chaque côté d'un trilatère est *juxtaposé* aux deux côtés de l'autre *non homologues* de ce côté.)

Dans l'étude des hexagones de même hexangle, il est avantageux de représenter un hexagone, non comme on le fait d'habitude, par la permutation hexagonale de ses sommets ou de ses côtés, mais *par ses deux trilatères de côtés alternés*, que nous appellerons dorénavant *les deux membres de structure de l'hexagone*, tout hexagone se démembrant en deux tels trilatères.

Nous allons montrer comment la notation que nous avons adoptée est naturellement suggérée par la désignation habituelle des côtés de l'hexangle.

3. Chaque sommet d'un hexangle étant désigné par l'un des six indices distincts x, y, z, u, v, w, chaque côté est d'ordinaire représenté par une *combinaison binaire* de ces indices.

Les deux côtés d'*un même doublet* (côtés *unis*) sont affectés de deux combinaisons binaires *ayant un indice commun*, soit xy et xz, et leur doublet peut être désigné sans ambiguïté par la notation A^x_{yz}.

Nous appellerons *n-uplet* de côtés un ensemble de n côtés de l'hexangle, tel que *chacun soit uni à chaque autre;* les côtés constitutifs d'un n-uplet en seront dits *les membres de structure*.

On peut distinguer *deux classes* de n-uplets.

Les membres de structure d'un n-uplet *de la première classe ne sont pas tous unis à un même sommet de l'hexangle;* cette classe ne comprend qu'une seule espèce, savoir *les triangles* de l'hexangle, qui s'appelleront ici : des *triplets steinériens* de côtés.

Le triplet steinérien qui a pour membres de structure les côtés xy, yz, zx, sera désigné par la notation S_{xyz}. Chacun de ses trois membres est univoquement déterminé par le *doublet* des deux autres, et s'appellera *le membre diagonal* du doublet de ces deux autres. A chaque triplet steinérien S_{xyz} correspond univoquement le triplet steinérien S_{uvw}; ces deux triplets seront dits *opposés*, leur ensemble constituant un *double-triplet steinérien* de côtés, représenté par la notation $SS_{xyz.uvw}$; ce double-triplet n'est autre chose qu'une *paire de triangles complémentaires* de l'hexangle.

Un n-uplet *de la seconde classe* a tous ses membres unis à un même sommet de l'hexangle, et peut s'appeler : *n-uplet radié*

(doublet, triplet, quadruplet ou quintuplet). Les combinaisons binaires d'indices attachées à ses divers membres ont un indice commun, celui du sommet uni à tous ces membres, et le n-uplet sera désigné par la lettre A, affectée *supérieurement* de l'indice commun aux combinaisons binaires attachées à ses côtés, et *inférieurement* de la combinaison n-aire des n autres indices distincts de ces combinaisons binaires.

Parmi les côtés de l'hexangle *à la fois unis aux deux membres d'un même doublet* A^x_{yz}, on en distingue un *spécial*, *non uni au centre du doublet*, soit le côté yz, qui est *le membre diagonal* du doublet (il forme avec ce doublet le triplet steinérien S_{xyz}), et trois autres côtés : xu, xv, xw, tous unis au centre du doublet, par conséquent chacun à chaque autre, et formant avec ce doublet le quintuplet radié $A^x_{yz\overline{u}\overline{v}\overline{w}}$, que l'on peut désigner plus simplement par A^x.

Les côtés et leurs n-uplets *radiés* jouissent des propriétés suivantes :

Il y a *six quintuplets* A^x, A^y, A^z, A^u, A^v, A^w (ayant chacun son centre en un sommet de l'hexangle). Chaque côté (xy) appartient à *deux* quintuplets distincts (A^x, A^y); deux quintuplets distincts (A^x, A^y) ont toujours *un unique membre commun* (xy), et les côtés unis à un côté donné sont *les huit autres membres des deux quintuplets auxquels appartient ce côté*.

Un même quintuplet A^x contient les *cinq quadruplets* A^x_{yzuv}, A^x_{zuvw}, A^x_{uvwy}, A^x_{vwyz}, A^x_{wyzu}, qui peuvent être plus simplement désignés par $A^x_{(w)}$, $A^x_{(y)}$, $A^x_{(z)}$, $A^x_{(u)}$, $A^x_{(v)}$, en mettant en évidence entre parenthèses l'indice qui ne figure pas dans la notation propre du quadruplet. Chaque quadruplet, tel $A^x_{(w)}$, contient *quatre triplets radiés :* A^x_{yzu}, A^x_{zuv}, A^x_{uvy}, A^x_{vyz}; deux quadruplets arbitraires distincts du même quintuplet, soit $A^x_{(w)}$ et $A^x_{(v)}$, ont toujours un unique triplet commun, soit A^x_{yzu}, et les triplets distincts du quintuplet sont au nombre de $C_5^3 = 10$. Chaque triplet A^x_{yzu} contient les trois doublets A^x_{yz}, A^x_{zu}, A^x_{uy}, et chaque doublet A^x_{yz} appartient aux trois triplets A^x_{yzu}, A^x_{yzv}, A^x_{yzw}, les doublets distincts du quintuplet étant au nombre de $C_5^2 = 10$.

Un quintuplet est univoquement déterminé par l'un quelconque de ses n-uplets (doublet, triplet ou quadruplet). Un côté d'un quintuplet, et les *membres diagonaux* des quatre doublets de ce quintuplet qui contiennent le côté mentionné, sont les cinq membres d'un

nouveau quintuplet, et en considérant successivement les cinq côtés du premier quintuplet, on obtient les cinq autres quintuplets.

Les dix doublets d'un même quintuplet forment un *système kirkmannien* de doublets, et les trois doublets (A^x_{yz}, A^x_{zu}, A^x_{uy}) d'un même triplet (A^x_{yzu}), un *sous-système kirkmannien;* chaque système contient dix sous-systèmes.

Deux doublets d'un même système sont dits *séparés*, s'ils n'ont pas de côté commun (tels A^x_{yz} et A^x_{uv}), et *associés*, s'ils sont séparés d'*un même troisième* (tels A^x_{yz} et A^x_{yu}, tous deux séparés de A^x_{vw}) : ils ont alors un côté commun (xy). A chaque doublet correspond univoquement dans son système un sous-système dont les trois doublets sont formés des trois autres côtés du quintuplet, chacun de ces trois derniers doublets étant donc séparé du premier.

4. Envisageant maintenant les *quinze trilatères* de l'hexangle, nous allons voir qu'il y a entre les éléments de cet ensemble des relations identiques à celles qui lient les quinze côtés de l'hexangle, à condition de faire correspondre à des *côtés unis* des *trilatères séparés*, c'est-à-dire (1) n'ayant nul côté commun, et à des côtés *séparés* des trilatères unis, c'est-à-dire ayant un côté commun.

Chaque trilatère étant, ainsi qu'on l'a vu (1), uni *par chacun de ses côtés* à deux autres, *est uni à six autres trilatères*, et est par conséquent *séparé de huit autres*.

Il y a *trois* trilatères *simultanément unis à chacun de deux trilatères séparés donnés*. Chacun de ces trois trilatères est défini par une *paire* formée d'un côté de l'un des trilatères donnés, et du côté *homologue* (2) de l'autre (deux côtés *non homologues* des trilatères donnés, étant unis à un même sommet de l'hexangle, ne peuvent appartenir simultanément à un même trilatère).

Considérant deux trilatères *séparés* donnés, les trilatères *unis au second et séparés du premier* sont donc au nombre de $6 - 3 = 3$.

Si des *huit* trilatères *séparés* d'un trilatère donné on élimine l'un d'eux, ainsi que les *trois* trilatères *unis à ce dernier et séparés du premier*, on voit qu'il y a *quatre* trilatères *simultanément séparés* de deux trilatères *séparés* donnés.

Parmi les quatre trilatères à la fois séparés de deux trilatères *séparés* donnés, il en est un *spécial*, formé des *trois diagonales principales de l'hexagone* des trilatères donnés, et qui s'appellera

le membre diagonal du doublet (ou de l'hexagone) de ces deux trilatères.

Il forme avec eux un triplet de trilatères deux à deux séparés *spécial*, que nous appellerons *triplet steinérien* (de trilatères), chacun de ces trois trilatères étant le membre diagonal de l'hexagone qui a pour membres de structure les deux autres.

Un triplet steinérien de trilatères est un ensemble de trois trilatères d'un même hexangle deux à deux séparés, *caractérisé* par cette propriété que deux côtés *homologues* (c'est-à-dire, non unis à un même sommet de l'hexangle) quelconques de deux d'entre eux *soient toujours les homologues d'un même côté du troisième.*

A tout ensemble de deux côtés *non homologues* de deux d'entre eux correspond donc dans le troisième *un unique côté qui soit simultanément non homologue des premiers*, et trois tels côtés *deux à deux non homologues* sont *concourants* (en un sommet de l'hexangle) ([1]).

Trois côtés deux à deux homologues des trilatères d'un triplet steinérien étant trois côtés deux à deux séparés, les trois triples de côtés deux à deux homologues de ces trilatères forment *trois nouveaux trilatères deux à deux séparés* (mais chacun uni à chacun des trois premiers), constituant un *nouveau* triplet steinérien qui sera dit *opposé* au premier, la relation d'*opposition* étant *réciproque*, et l'ensemble de ces deux triplets s'appellera un *double-triplet steinérien* (de trilatères).

Parmi les côtés des trilatères d'un double triplet steinérien figurent seulement *neuf côtés de l'hexangle*, qui sont les six côtés d'un hexagone (de deux trilatères d'un même triplet) et ses trois diagonales principales. Les six autres côtés de l'hexangle sont les six diagonales secondaires de cet hexagone, c'est-à-dire les côtés de *deux triangles complémentaires de l'hexangle*. On obtient donc un double triplet steinérien de trilatères en supprimant, des *quinze*

([1]) Si trois trilatères sont donnés indépendamment de tout hexangle, leurs neuf sommets et neuf côtés étant supposés distincts et chaque sommet de chacun étant supposé extérieur à chaque côté de chaque autre, pour qu'ils appartiennent à un même triplet steinérien, il faut et suffit que leurs neuf côtés puissent se grouper en trois triples contenant chacun un côté de chaque trilatère, de telle sorte que trois côtés arbitraires dont deux quelconques n'appartiennent ni à un même triple, ni à un même trilatère, soient toujours concourants.

côtés de l'hexangle, ceux de *deux* triangles *complémentaires;* il y a donc *dix* doubles triplets, correspondant aux *dix paires* de triangles complémentaires de l'hexangle (ou, si l'on veut, aux dix doubles triplets steinériens *de côtés*).

Si, des quatre trilatères à la fois séparés de chacun de deux trilatères séparés donnés, on élimine *le membre diagonal* du doublet des trilatères donnés, les trois autres trilatères à la fois séparés de chacun des deux premiers sont constitués chacun par une diagonale *principale* de l'hexagone de ces premiers, et la *paire* de diagonales *secondaires* de cet hexagone, *opposée* (1) *à cette principale*.

Ils sont donc aussi *chacun séparé de chaque autre* (mais chacun *uni* au membre diagonal de l'hexagone des premiers) et forment avec les deux premiers *un quintuplet de trilatères deux à deux séparés*, que nous appellerons *quintuplet kirkmannien* de trilatères.

Nous appellerons *n-uplet kirkmannien* de trilatères ($n = 2$, 3, 4, 5) (correspondant au n-uplet radié de côtés) l'ensemble de n trilatères de l'hexangle *deux à deux séparés* en excluant de cette définition le triplet *spécial* dont chacun des trilatères est le membre diagonal de l'hexagone des deux autres (triplet *steinérien*).

1° Un n-uplet kirkmannien appartient *à un unique quintuplet*, univoquement défini par deux trilatères quelconques du n-uplet.

2° Deux quintuplets distincts ont *au plus un trilatère commun*, puisque deux trilatères *séparés* définissent *un unique quintuplet*.

3° Un trilatère ne peut appartenir à plus de *deux* quintuplets, car s'il appartenait à *trois*, les *douze* autres trilatères de ces quintuplets, *tous distincts* (2°), seraient *douze* trilatères *séparés du premier* alors qu'il n'y en a que *huit*.

4° Chaque trilatère appartient donc à *deux quintuplets distincts et à deux seulement*, les *huit* trilatères séparés du trilatère envisagé se partageant donc en deux quadruplets formant chacun un quintuplet avec le premier trilatère.

5° Les membres diagonaux des *quatre* hexagones que forme un même trilatère d'un quintuplet avec les quatre autres trilatères de ce quintuplet, constituent avec ce trilatère le second quintuplet contenant ce trilatère (car ce sont les quatre autres trilatères séparés du premier). Supposant obtenu un quintuplet, en envisageant successivement chacun de ses cinq trilatères, on obtient par ce procédé *cinq*

nouveaux quintuplets, distincts du premier et ayant chacun avec ce premier un *unique* membre commun. Ils sont aussi *distincts chacun de chaque autre*, car deux d'entre eux contenant chacun l'un de deux trilatères du premier (distincts), ne sauraient se confondre sans se confondre aussi avec le premier.

Deux quelconques des cinq derniers quintuplets ont d'ailleurs un membre commun (*unique*, 2°), savoir : le membre diagonal de l'hexagone des deux trilatères (du premier quintuplet) qui leur ont respectivement donné naissance. En opérant sur l'un de ces quintuplets comme on l'a fait sur le premier, les *six* quintuplets obtenus (y compris le quintuplet envisagé) ne sont donc autres que les six précédents.

Chaque trilatère constitutif de l'un des *six* quintuplets appartenant à *deux* de ces quintuplets, et deux quelconques de ces quintuplets ayant *un* trilatère commun, les trilatères constitutifs *distincts* de ces quintuplets sont au nombre de *quinze*, leur ensemble comprenant donc tous les trilatères de l'hexangle, et il n'y a pas d'autre quintuplet, les deux quintuplets qui contiennent un trilatère donné étant deux des six précédents.

5. Chacun des six quintuplets de trilatères sera désigné par l'un de six indices x, y, z, u, v, w, et chaque trilatère par la lettre T affectée de la combinaison binaire des indices des deux quintuplets auxquels il appartient. Ainsi, T_{xy} est le trilatère commun aux deux quintuplets x et y.

Deux trilatères *séparés*, appartenant toujours *à un unique même quintuplet*, auront en commun, dans les combinaisons qui les désignent, l'indice de leur quintuplet de jonction, la combinaison binaire de leurs autres indices désignant précisément le trilatère diagonal de leur hexagone; deux trilatères *unis* n'auront pas d'indice commun. (Ex. : T_{xy} et T_{xz} sont deux trilatères *séparés*, le membre diagonal de leur hexagone est T_{yz}; T_{xy} et T_{zu} sont deux trilatères *unis*.)

Un doublet (hexagone), triplet, quadruplet kirkmannien de trilatères sera désigné par la lettre V, affectée *supérieurement* de l'indice du quintuplet auquel il appartient (indice commun de ces trilatères), et *inférieurement*, de la combinaison des autres indices de ces trilatères. (Ex. : le *quadruplet* V^x_{yzuv} est formé de quatre tri-

latères *deux à deux séparés :* T_{xy}, T_{xz}, T_{xu}, T_{xv}, appartenant tous au quintuplet x.)

Dans le cas du quadruplet, on peut remplacer cette notation par cette autre : $V^x_{(w)}$, l'indice mis en évidence entre parenthèses étant celui du trilatère du quintuplet x qui n'entre pas dans la constitution du quadruplet.

Trois trilatères d'un même *triplet steinérien* seront, par exemple : T_{xy}, T_{yz}, T_{zx}, où chacun d'eux est le membre diagonal du doublet des deux autres, le triplet steinérien *opposé* étant T_{vw}, T_{wu}, T_{uv}.

Un *hexagone* n'étant autre que *le doublet de ses deux membres de structure*, sera représenté par une expression telle que V^x_{yz}, ses deux membres de structure étant T_{xy} et T_{xz}, et son membre diagonal, mis aussi en évidence par cette notation, étant T_{yz}.

Un *côté de l'hexangle* sera désigné par la lettre d, *affectée des trois paires d'indices attachées aux trois trilatères deux à deux unis auxquels appartient ce côté*. (Ex. : $d_{xy.zu.vw}$ est le côté de l'hexangle commun aux trois trilatères deux à deux unis : T_{xy}, T_{zu}, T_{vw}). Les trois côtés d'un même trilatère T_{xy} seront donc

$$d_{xy.zu.vw}, \quad d_{xy.zv.wu}, \quad d_{xy.zw.uv}.$$

Un *point diagonal* de l'hexangle, sommet d'un *unique* trilatère T_{xy}, sera représenté par la lettre Q, affectée des deux paires d'indices des deux trilatères *autres que* T_{xy} qui ont en commun avec T_{xy} le côté *opposé* (dans T_{xy}) *au point envisagé*. (Ex. : $Q_{zu.vw}$ est un sommet du trilatère T_{xy}, celui qui est opposé au côté $d_{xy.zu.vw}$ que ce trilatère a en commun avec les deux autres trilatères T_{zu} et T_{vw}).

Les trois sommets du trilatère T_{xy} sont :

$$Q_{zu.vw}, \quad Q_{zv.wu}, \quad Q_{zw.uv}.$$

Au point diagonal $Q_{zu.vw}$ sont unis les deux côtés $d_{xy.zv.wu}$ et $d_{xy.zw.uv}$. Au côté $d_{xy.zu.vw}$ sont unies les *trois paires de points diagonaux :*

$$Q_{zv.wu}, Q_{zw.uv}, \quad Q_{xv.yw}, Q_{xw.yv}, \quad Q_{xz.yu}, Q_{xu.yz},$$

qui sont les traces des paires de côtés opposés du quadrangle complémentaire du couple de sommets de l'hexangle unis au côté envisagé.

Les deux triples de côtés *alternés* de l'hexagone V^x_{yz}, côtés de ses

deux membres de structure T_{xy} et T_{xz}, sont :

$$d_{xy.zu.vw},\ d_{xy.zv.wu},\ d_{xy.zw.uv};\quad d_{xz.yu.vw},\ d_{xz.yv.wu},\ d_{xz.yw.uv}.$$

Deux côtés *de même rang* de ces deux triples appartiennent, comme on voit, *à un même* des trois trilatères T_{vw}, T_{wu}, T_{uv}, et sont donc *séparés*, leur ensemble formant *une paire de côtés opposés* de l'hexagone.

Les trois paires de côtés opposés de l'hexagone V^x_{yz} sont donc :

$$d_{xy.zu.vw},\ d_{xz.yu.vw};\quad d_{xy.zv.wu},\ d_{xz.yv.wu};\quad d_{xy.zw.uv},\ d_{xz.yw.uv}.$$

Les *centres* de ces trois paires, *points diagonaux principaux de l'hexagone* V^x_{yz}, sont les trois points

$$Q_{yz.xu},\quad Q_{yz.xv},\quad Q_{yz.xw}\ \text{(1)}.$$

Les sommets de deux trilatères séparés T_{xy} et T_{xz}, étant respectivement :

$$Q_{zu.vw},\ Q_{zv.wu},\ Q_{zw.uv};\quad Q_{yu.vw},\ Q_{yv.wu},\ Q_{yw.uv},$$

se groupent en *trois paires de sommets homologues*, tels que $Q_{zu.vw}$, $Q_{yu.vw}$, deux sommets homologues ayant en commun une même combinaison d'indices (soit vw), les côtés respectivement opposés à ces sommets appartenant à un même trilatère T_{vw} de l'hexangle et étant donc *séparés*, et formant une paire de côtés opposés de l'hexagone qui a pour membres de structure les deux trilatères envisagés. Ces trois paires de sommets homologues sont donc *les trois paires de points diagonaux secondaires* (2) de cet hexagone V^x_{yz}.

Remarque. — On peut observer, et cette remarque sera utilisée

(1) Pour lire rapidement le Chapitre suivant, le lecteur devra bien se familiariser avec ces notations.

Un côté donné appartient-il à un trilatère donné ? La combinaison binaire attachée au trilatère figure dans l'expression du côté.

Un point diagonal donné est-il sommet d'un trilatère donné? Nul indice du trilatère ne figure dans l'expression du point diagonal.

Un point diagonal donné est-il uni à un côté donné? La combinaison des deux indices *qui ne figurent pas* dans l'expression du point diagonal *figure* dans l'expression du côté, et les deux autres combinaisons binaires du côté, formées des quatre mêmes indices que les deux combinaisons binaires du point diagonal, sont *distinctes* de ces dernières.

Un point diagonal donné est-il *point principal* d'un hexagone donné? L'expression du point diagonal contient la combinaison binaire inférieure de l'expression de l'hexagone (celle de son membre diagonal), et l'autre combinaison binaire du point diagonal contient l'indice supérieur de l'expression de l'hexagone.

au Chapitre suivant, que chaque paire de points diagonaux secondaires d'un hexagone V^x_{yz}, soit $Q_{zu.vw}$, $Q_{yu.vw}$, est formée de deux points diagonaux *principaux* d'un même autre hexagone V^u_{vw}, qui est, suivant une définition que nous allons immédiatement donner, un hexagone *opposé* au premier.

6. Les trois hexagones V^x_{yz}, V^y_{zx}, V^z_{xy}, qui ont chacun pour membres de structure *deux* des *trois* trilatères d'un même triplet steineirien de trilatères, forment aussi un triplet spécial *d'hexagones*, que nous appellerons un *semi-système de Steiner;* le membre diagonal de chacun d'eux est membre de structure de chacun des deux autres. Deux hexagones d'un même semi-système seront dits *conjugués.*

Un semi-système steinérien d'hexagones sera représenté par S_{xyz}; à chaque semi-système S_{xyz} correspond un second S_{uvw}; deux tels semi-systèmes seront dits *opposés*, leur ensemble constituant un *système de Steiner*, représenté par $SS_{xyz.uvw}$.

Chaque hexagone d'un semi-système sera dit *opposé* à chaque hexagone du semi-système opposé; deux hexagones *opposés* sont donc tels que V^x_{yz}. V^u_{vw}, leurs deux triples d'indices n'ayant nul élément commun.

Chaque hexagone se déduit d'un hexagone conjugué en remplaçant un membre de structure de cet autre par le membre diagonal de ce même autre, et d'un hexagone opposé, en remplaçant une paire de côtés opposés de cet autre par la paire de diagonales principales correspondantes (2) de ce même autre.

Les côtés distincts des six hexagones d'un même système de Steiner sont seulement au nombre de *neuf :* les *six* côtés et les *trois* diagonales principales de l'un deux. Ils ont mêmes triangles de sommets alternés, ou, si l'on veut, de *diagonales secondaires*, ces dernières étant les six côtés de l'hexangle qui n'entrent pas dans la constitution de ces hexagones, et formant deux triangles *complémentaires* de l'hexangle. Les 60 hexagones du même hexangle peuvent donc se répartir en 10 systèmes de Steiner, subdivisés chacun en deux semi-systèmes, ces 10 systèmes correspondant univoquement aux 10 paires de triangles complémentaires de l'hexangle.

7. Les hexagones dont les trilatères de structure appartiennent à

un même quintuplet de Kirkmann sont au nombre de $C_5^2 = 10$, et leur ensemble s'appellera un *système* d'hexagones *de Kirkmann*.

Nous appelons *hexagones séparés* deux hexagones qui n'ont *nul côté commun*, et *hexagones associés*, deux hexagones qui sont *séparés d'un même troisième*.

Les quatre trilatères de structure de deux hexagones *séparés* étant deux à deux séparés et appartenant par conséquent à un même quintuplet de Kirkmann, ces deux hexagones appartiennent à un même système de Kirkmann; deux hexagones *associés* appartiennent aussi au même système de Kirkmann de leur hexagone séparé commun.

Deux hexagones d'un même système de Kirkmann seront d'ailleurs ou séparés, si leurs quatre trilatères sont distincts, ou associés, s'ils ont un trilatère de structure commun, leur hexagone séparé commun étant formé des deux autres trilatères du quintuplet. V_{yz}^x, V_{uv}^x sont deux hexagones *séparés;* V_{yz}^x, V_{yu}^x sont deux hexagones *associés*; ces hexagones appartiennent au même système (x) de Kirkmann.

Les membres diagonaux des premiers sont *unis*, comme l'indique la notation; ils ont donc une diagonale principale commune; ceux des seconds sont séparés.

Deux hexagones *associés*, tels V_{yz}^x, V_{yu}^x, ont un trilatère de structure commun (T_{xy}), le second trilatère de structure de chacun d'eux (tel T_{xz}) étant, comme l'indique la notation, uni au membre diagonal de l'autre (tel T_{yu}), et étant donc formé d'une diagonale principale de cet autre et de sa paire de diagonales secondaires opposées (2) à cette principale.

(Deux hexagones *conjugués* ont aussi un membre de structure commun, leurs seconds membres de structure étant aussi séparés, mais le second membre de chacun d'eux est le membre diagonal de l'autre.)

Il y a *trois* hexagones séparés d'un même hexagone V_{yz}^x, savoir : V_{uv}^x, V_{vw}^x, V_{wu}^x. Chaque trilatère de structure de chacun d'eux est formé d'une diagonale principale de l'hexagone séparé commun, et de la paire de diagonales secondaires de celui-ci opposée à la principale. Chacun de ces trois hexagones a une même diagonale principale que l'hexagone séparé commun, et une même paire de diagonales secondaires opposée à cette principale, et peut être distingué des deux autres par cette principale.

Nous appelons *sous-système de Kirkmann* l'ensemble de trois tels hexagones, *séparés d'un même quatrième*.

Il y a dans chaque système *dix* sous-systèmes, correspondant chacun à chacun des *dix* hexagones de ce système.

Si à partir d'un hexagone donné on construit les trois hexagones séparés de celui-ci (formés chacun de deux diagonales principales du premier et de ses deux *paires* de diagonales secondaires opposées à ces principales), puis les hexagones séparés des hexagones obtenus, et ainsi de suite, tous les hexagones obtenus appartenant au même système de Kirkmann que le premier ne font que se reproduire entre eux.

Les 60 hexagones de l'hexangle se répartissent en *six* systèmes de Kirkmann. Un système de Steiner et un système de Kirkmann ont *un unique hexagone commun*, puisque les *exposants* des six hexagones d'un même système de Steiner sont distincts; chaque hexagone d'un système (de Steiner ou de Kirkmann) définit un système de l'autre espèce.

8. On peut donner des hexagones d'un même système de Kirkmann une représentation schématique intéressante ([1]), où chacun des *dix* hexagones étant représenté par un point, les points représentatifs de *trois* hexagones *d'un même sous-système* soient *alignés*. La figure représentative n'est autre que la *figure polaire ternaire* désignée par $g(3, 5)$ (*Géométrie moderne*, Chap. I, § III, *fig*. 2, I), tracée sur un plan des éléments de jonction (droites et plans) des sommets d'un pentangle gauche.

Le système de Kirkmann envisagé étant par exemple le système (w), et les *dix* sommets de la figure polaire étant chacun affectés de l'une des *dix* combinaisons binaires des *cinq* indices x, y, z, u, v, conformément aux règles indiquées, si l'on fait correspondre chaque sommet de la figure à l'hexagone du système (w) dont le membre diagonal est affecté de la même combinaison que ce som-

---

([1]) On peut donner du système de Kirkmann une autre représentation schématique, d'ailleurs peu intéressante (où soient reliés les points représentatifs de deux hexagones *séparés*, et non plus de deux hexagones *associés*), *par un arbre géométrique* formé d'un hexagone d'une part, et de trois points reliés à un même quatrième d'autre part, chacun de ces trois points étant en outre relié à deux sommets *opposés* de l'hexagone.

met, les trois hexagones V_{xy}^{w}, V_{yu}^{w}, V_{ux}^{w} *d'un même sous-système de Kirkmann* auront pour représentatifs les sommets *alignés xy, yu, ux* de la figure polaire. Les droites de la figure représentent donc les sous-systèmes de Kirkmann.

9. Nous avons déjà défini les paires d'hexagones *conjugués*, *opposés*, *séparés, associés*. Deux hexagones étant dits *n-collatéraux* quand ils ont *n côtés communs*, deux hexagones *conjugués* ou *associés* sont *tricollatéraux* (ils ont un membre de structure commun, leurs deux autres membres étant séparés); deux hexagones *opposés* sont *quadricollatéraux* (ils ne diffèrent l'un de l'autre que par l'une de leurs paires de côtés opposés, laquelle est formée pour chacun d'eux d'une paire de diagonales principales de l'autre). Il n'y a pas de paire de quinticollatéraux, cinq côtés d'un hexagone déterminant univoquement le sixième.

Deux hexagones qui ont le même *membre diagonal* forment une paire d'*isodiagonaux :* tels les deux hexagones V_{yz}^{x}, V_{yz}^{u}.

Chaque membre de structure de chacun d'eux est *uni à un seul* des membres de l'autre (T_{xy} et T_{uz}); ces hexagones ont donc *deux côtés communs* et sont *bicollatéraux;* ces côtés, $d_{xy.uz.vw}$, $d_{xz.uy.vw}$, forment d'ailleurs (5) *une paire de côtés opposés* de chacun d'eux, et ces deux hexagones on un même *point principal* en $Q_{yz.xu}$.

Deux hexagones peuvent avoir un membre de structure commun, leurs deux autres membres étant cette fois *unis* (et non plus séparés, comme dans le cas d'hexagones conjugués ou associés). Les deux hexagones ont alors un quatrième côté commun, et forment un nouveau type de *paire de quadricollatéraux*. Ces hexagones ayant trois côtés *alternés* communs, le quatrième côté commun est nécessairement *juxtaposé à deux des premiers et opposé au troisième*. Ils ont donc, comme dans le cas d'isodiagonaux, une même paire de côtés opposés et un même point principal. Tels sont V_{yz}^{x}, V_{ux}^{y}; l'exposant de chacun figure dans la combinaison binaire de l'autre, les autres indices de l'une et de l'autre combinaison étant distincts.

Ces deux hexagones seront dits *voisins*, parce qu'ils se déduisent chacun de l'autre par simple transposition des sommets unis à celui de leurs côtés opposés communs qui appartient à leur commun membre de structure.

Il y a *quatre* hexagones ayant une même paire de côtés opposés,

ou si l'on veut, un point principal donné $Q_{zu.vw}$, savoir V^v_{zu}, V^w_{zu}; V^z_{vw}, V^u_{vw}; ils forment deux paires d'isodiagonaux, chaque hexagone d'une paire est voisin de chaque hexagone de l'autre paire.

Ce sont deux hexagones *voisins* que nous avons considérés pour établir l'extension de la propriété caractéristique de l'hexagone *pascalien* aux autres hexagones du même hexangle (Chap. I, § VII, 2).

Nous avons alors mentionné sans y insister que tout hexagone pouvait se déduire de tout autre par une suite de transpositions de sommets juxtaposés, c'est-à-dire pouvait lui être relié par une chaîne d'hexagones voisins. Or, deux hexagones *associés* V^x_{yz}, V^x_{yu}, ont *de communs voisins* (exactement *deux* : V^y_{xv}, V^y_{xw}); deux hexagones *séparés* V^x_{yz}, V^x_{uv}, ont *de communs associés* (exactement *quatre* : V^x_{yu}, V^x_{yv}, V^x_{zu}, V^x_{zv}); on peut donc passer de tout hexagone à tout autre *du même système de Kirkmann* par un commun voisin, si les deux hexagones sont associés, ou par une chaîne de trois hexagones consécutivement voisins, si les deux hexagones sont séparés. Deux hexagones *isodiagonaux* V^x_{yz}, V^u_{yz}, ont *de communs voisins* (exactement *deux* : V^y_{xu}, V^z_{xu}); tout hexagone ayant dans tout système de Kirkmann *distinct du sien* soit un *voisin* (dans les deux systèmes auxquels appartiennent respectivement ses *deux conjugués*), soit un *isodiagonal* (dans les trois systèmes auxquels appartiennent respectivement ses *trois opposés*), on voit que l'on peut passer de tout hexagone à tout autre du même hexangle par une chaîne d'hexagones consécutivement voisins.

Restent *trois* sortes de paires d'hexagones peu intéressantes, que nous mentionnons pour compléter la nomenclature :

Un seul des membres de structure de chacun peut être *simultanément uni* à chacun des deux membres de l'autre, leurs deux autres membres respectifs étant *séparés*, tels V^x_{yz} et V^u_{yv}.

Les deux hexagones ont alors *trois côtés communs*, dont deux *juxtaposés*, le troisième étant *alterné* à l'un des premiers et *opposé* à l'autre, et deux côtés communs qui sont *alternés* dans l'un des hexagones étant *opposés* à l'autre. Ces hexagones forment une paire de *tricollatéraux* que nous qualifierons de *vulgaire*, pour la distinguer des paires de tricollatéraux remarquables que sont les paires de *conjugués* ou d'*associés*.

Un seul membre de structure d'*un seul* de deux hexagones d'une paire peut être *simultanément uni* à chacun des deux membres de

l'autre, le second membre du premier étant *séparé* de chacun des membres du second hexagone. Les deux hexagones ont donc *deux* côtés communs, lesquels, appartenant à un même membre de structure du premier sont *alternés* dans ce premier, alors qu'ils sont *opposés* dans le second. Ces hexagones forment une paire *dissymétrique* de *bicollatéraux*, que l'on pourra qualifier de *vulgaire*, pour la distinguer de la paire remarquable de bicollatéraux *isodiagonaux*. Parmi les divers bicollatéraux vulgaires d'un même hexagone, on pourra distinguer ceux de la première espèce, où les deux côtés communs sont *alternés dans l'hexagone envisagé*, et ceux de seconde espèce, où ces côtés sont *opposés* dans le premier hexagone. Tels sont les deux hexagones : V^x_{yz} et V^u_{xv}; le second est de seconde espèce pour le premier, et le premier de première espèce pour le second.

Enfin, *un seul* membre de structure de chacun peut être uni à *un seul* membre de structure de l'autre, tels V^x_{yz} et V^u_{xz}, les hexagones formant donc une paire d'*unicollatéraux*, laquelle est encore *dissymétrique*, *le membre diagonal d'un seul des deux* (du second, dans le cas cité) étant *membre de structure* de l'autre. Le second sera considéré comme de seconde espèce pour le premier, et le premier comme de première espèce pour le second.

Un hexagone a parmi les 59 autres du même hexangle : 2 *conjugués*, 3 *opposés*, 3 *séparés*, 6 *associés*, 3 *isodiagonaux*, 6 *voisins*, 12 *tricollatéraux vulgaires*, 6 *bicollatéraux vulgaires de première espèce*, 6 *bicollatéraux vulgaires de seconde espèce*, 6 *unicollatéraux de première espèce*, 6 *unicollatéraux de seconde espèce*.

Pour avoir une idée claire de la répartition des 60 hexagones du même hexangle relativement à l'un d'eux, il suffit de jeter les yeux sur le Tableau que nous donnons de ces hexagones et de leurs 15 trilatères générateurs, disposés en six systèmes de Kirkmann.

On a formé ce Tableau à partir de l'hexagone régulier (pour la simplicité des figures), les deux membres de structure de celui-ci, désignés respectivement par T_{xy} et T_{xz} étant pris pour trilatères générateurs du quintuplet (x), les trois autres trilatères de ce quintuplet, respectivement désignés par T_{xu}, T_{xv}, T_{xw}, étant chacun formés d'une diagonale principale de l'hexagone initial et de la paire de diagonales secondaires de cet hexagone *opposée* à cette principale.

Les désignations de tous les trilatères, et par suite de tous les hexagones, sont alors fixées, la combinaison uv, par exemple, devant être

attribuée au trilatère qui est le membre diagonal du doublet (T_{xu}, T_{xv}), ou de l'hexagone V^x_{uv}, et le quintuplet (v), par exemple, étant formé du trilatère T_{vx} du premier quintuplet (x), et des membres diagonaux des quatre hexagones que forme ce trilatère avec les quatre autres du premier quintuplet.

Les hexagones qui ont une même relation avec l'hexagone initial V^x_{yz} se trouvent dans ce Tableau naturellement groupés en rectangles.

Nous donnons aussi le Tableau des coordonnées ([1]) des sommets, côtés et points diagonaux d'un hexangle *pascalien*, c'est-à-dire, dont deux trilatères *séparés* sont *homologiques*, l'un de ces trilatères étant pris pour *référence*, et leur axe d'homologie (*pascale* de leur hexagone), pour *droite-unité*. Le lecteur que n'effraient pas les longs calculs pourra vérifier analytiquement les propositions du Chapitre suivant, en attribuant des valeurs numériques simples aux trois arbitraires a, b, c, de ce Tableau.

10. Outre les ensembles remarquables d'hexagones déjà signalés (systèmes et sous-systèmes de Steiner et de Kirkmann), il y a *deux* sortes intéressantes de n-uplets d'hexagones : les n-uplets *d'isodiagonaux*, dont tous les hexagones ont *même membre diagonal*, et les n-uplets *d'associés*, tels que chacun de leurs hexagones soit *associé* de chaque autre *sans toutefois que trois d'entre eux soient séparés d'un même quatrième*, restriction qui exclut des n-uplets d'associés *les sous-systèmes de Kirkmann*.

Il y a quatre hexagones ayant un membre diagonal donné T_{yz}, savoir V^x_{yz}, V^u_{yz}, V^v_{yz}, V^w_{yz} (il n'y a donc pas de quintuplet d'isodiagonaux). Leurs points diagonaux principaux *distincts* sont seulement au nombre de *six*, deux quelconques d'entre eux ayant un point principal commun. (Dans le cas de l'hexangle *pascalien*, ces points sont précisément *les sommets du quadrilatère de leurs pascales*, les pascales de deux d'entre eux étant unies à leur commun point principal.)

Tous les hexagones d'un même n-uplet *d'associés* appartiennent *au même système de Kirkmann;* deux d'entre eux étant, par exemple, V^x_{yz} et V^x_{yu}, tout autre hexagone de leur n-uplet sera soit V^x_{yv}, soit V^x_{yw}; il n'y a donc pas non plus de quintuplet d'associés.

([1]) L'introduction en Géométrie des procédés analytiques est faite au Chapitre X de cet Ouvrage.

Chaque doublet ou triplet d'isodiagonaux ou d'associés appartient *à un unique quadruplet de même espèce;* chaque quadruplet contient quatre triplets et six doublets, chaque triplet contient trois doublets et chaque doublet appartient à trois triplets. Un triplet et le quatrième hexagone de son quadruplet seront dits *complémentaires*.

Le quadruplet *d'isodiagonaux* ayant pour commun membre diagonal T_{yz} sera désigné par l'expression W_{yz}; le triplet $(V^x_{yz}, V^u_{yz}, V^v_{yz})$, par W^{xuv}_{yz}, ou plus simplement par $W^{(w)}_{yz}$, son hexagone complémentaire étant V^w_{yz}; le doublet (V^x_{yz}, V^u_{yz}), par W^{xu}_{yz}.

Deux doublets d'isodiagonaux qui se déduisent chacun de l'autre, tels W^{xy}_{zu} et W^{zu}_{xy}, par permutation simultanée des indices inférieurs avec les supérieurs, seront dits *inverses* l'un de l'autre; deux doublets d'isodiagonaux qui se déduisent chacun de l'autre, tels W^{xy}_{zu} et W^{zy}_{xu}, par permutation *d'un seul* indice *supérieur* avec *un seul* indice *inférieur*, seront *dits contigus* l'un à l'autre.

Le quadruplet *d'associés* $(V^x_{yz}, V^x_{yu}, V^x_{yv}, V^x_{yw})$ sera désigné par W^x_y; le triplet $(V^x_{yz}, V^x_{yu}, V^x_{yv})$ par $W^x_{y(w)}$, son hexagone complémentaire étant V^x_{yw}.

Chaque hexagone V^x_{yz} de l'hexangle appartenant à un unique quadruplet d'isodiagonaux W_{yz}, et aux deux quadruplets d'associés W^x_y et W^x_z, il y aura 15 quadruplets d'isodiagonaux et 30 quadruplets d'associés (dont cinq appartiennent à chaque système de Kirkmann, deux quadruplets W^x_y et W^x_z d'un même système ayant en commun l'hexagone V^x_{yz}).

A chaque trilatère T_{xy} de l'hexangle correspond d'ailleurs univoquement le quadruplet d'isodiagonaux W_{xy}, dont tous les hexagones admettent pour membre diagonal le trilatère envisagé, et *la paire* de quadruplets d'associés (W^x_y, W^y_x), dont les *huit* hexagones admettent ce trilatère *pour membre de structure*.

Nous dirons que ces trois quadruplets sont *deux à deux conjugalement homologues*, en entendant par là que chaque hexagone de chacun d'eux est *conjugué* d'un hexagone de chacun des deux autres, trois hexagones deux à deux homologues de ces quadruplets, tels V^z_{xy}, V^x_{yz}, V^y_{xz}, étant donc ceux d'un même semi-système de Steiner.

La paire de quadruplets *d'associés* conjugalement homologues (W^x_y, W^y_x) peut s'appeler *la paire de quadruplets de raccordement de leurs systèmes de Kirkmann* (x) *et* (y); de même que deux quin-

tuplets quelconques (x) et (y) *de trilatères* se raccordent par leur trilatère commun T_{xy}, deux systèmes quelconques (x) et (y) d'hexagones de Kirkmann se raccordent par deux quadruplets d'associés conjugalement homologues leur appartenant respectivement, et dont tous les hexagones ont pour membre de structure commun le trilatère de raccordement des quintuplets (de trilatères) correspondant à ces systèmes.

Trois paires d'hexagones homologues de deux quadruplets *conjugalement* homologues forment *deux triplets conjugalement homologues*.

Tels sont les deux triplets *d'associés* $W^{x}_{y(w')}$ et $W^{y}_{x(w')}$, ou encore le triplet *d'associés* $W^{x}_{y(w')}$ et le triplet *d'isodiagonaux* $W^{(w')}_{xy}$.

Chaque triplet *d'associés* $W^{x}_{y(w')}$ détermine univoquement le triplet *d'associés* $W^{y}_{x(w')}$ qui lui est conjugalement homologue.

L'hexagone V^{y}_{xw} *complémentaire du second* s'appellera l'hexagone *voisin* du premier triplet, parce qu'il est voisin de chacun des hexagones de ce triplet. On peut observer à ce sujet que tout hexagone d'un quadruplet d'associés est *voisin* de tout hexagone du quadruplet d'associés conjugalement homologue, *autre que son propre homologue* (lequel lui est *conjugué*), les *six* voisins d'un hexagone donné formant donc deux triplets d'associés qui sont les homologues conjugaux respectifs des deux triplets complémentaires de l'hexagone donné dans les deux quadruplets d'associés auxquels appartient cet hexagone. Chaque hexagone d'un quadruplet d'associés a donc deux côtés opposés communs, et par suite un point principal commun avec tout hexagone *non homologue* du quadruplet d'associés conjugalement homologue.

Une paire de triplets d'associés conjugalement homologues $W^{x}_{y(w')}$, $W^{y}_{x(w')}$ détermine univoquement un hexagone (n'appartenant à nul de leurs systèmes de Kirkmann) : c'est l'hexagone V^{w}_{xy}, *conjugué des deux complémentaires de ces triplets*, ou *complémentaire du triplet d'isodiagonaux* $W^{(w')}_{xy}$ *homologue conjugal simultané des premiers*.

Réciproquement, l'hexagone V^{w}_{xy} détermine univoquement la paire de triplets d'associés conjugalement homologues $W^{x}_{y(w')}$, $W^{y}_{x(w')}$.

L'hexagone mentionné sera dit *le correspondant* de la paire de triplets d'associés. Cette correspondance, d'hexagone à paire de triplets d'associés conjugalement homologues, est très importante.

Deux *triplets d'associés* sont dits *diagonalement homologues*, si chaque hexagone de l'un est *isodiagonal* d'un hexagone de l'autre; tels les deux triplets $W^x_{y(z)}$ et $W^z_{y(x)}$ (Une définition analogue ne convient ni aux autres paires de triplets, ni aux paires de quadruplets). A cette paire de triplets correspond encore univoquement un hexagone V^y_{xz}, *conjugué de deux hexagones complémentaires* de ces triplets, et qui sera dit *le correspondant* de cette paire.

Deux triplets *d'isodiagonaux*, ou deux triplets *d'associés*, sont *associativement homologues*, si chaque hexagone de l'un est *l'associé* d'un hexagone de l'autre. Tels sont $W^{(x)}_{yz}$ et $W^{(y)}_{xz}$, ou $W^x_{y(z)}$ et $W^x_{z(y)}$.

(Une définition analogue ne convient ni aux paires de quadruplets, ni aux paires de triplets dont l'un est formé d'isodiagonaux et l'autre d'associés.)

Dans le cas de la paire mentionnée *d'isodiagonaux* associativement homologues, l'hexagone V^z_{xy}, *conjugué des deux complémentaires* des triplets de la paire, sera encore dit *le correspondant de la paire.*

Les membres diagonaux des hexagones de ces deux triplets sont deux trilatères de l'hexangle *séparés;* réciproquement, les deux *quadruplets d'isodiagonaux* relatifs à deux trilatères *séparés* renferment chacun un triplet tel que ces deux triplets soient associativement homologues.

Les triplets *d'isodiagonaux*, au nombre de 60 (chacun des 15 quadruplets en contient 4), se groupent *en 20 triples où trois triplets d'un même triple sont deux à deux associativement homologues;* tels sont les trois triplets

$$W^{(x)}_{yz},\quad W^{(y)}_{zx},\quad W^{(z)}_{xy}.$$

Leurs trois trilatères diagonaux yz, zx, xy forment un triplet steinérien, et trois hexagones deux à deux homologues de ces triplets tels

$$V^u_{yz},\quad V^u_{zx},\quad V^u_{xy},$$

appartiennent à un même sous-système de Kirkmann.

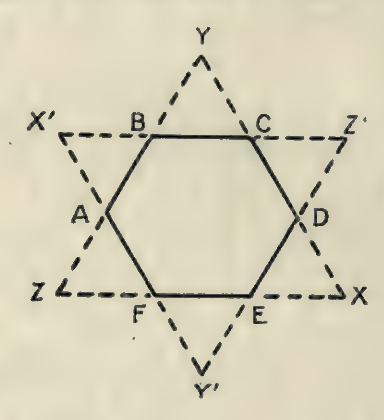
Deux triplets *d'associés* associativement homologues, $W^x_{y(z)}$ et $W^x_{z(y)}$, s'appelleront plutôt *triplets réciproques;* tous leurs hexagones appartiennent au même système de Kirkmann. Les hexagones complémen-

Tableau des 60 hexagones de l'hexangle régulier et de leurs 15 trilatères générateurs disposés en 6 systèmes de Kirkmann.

TRILATÈRES					Nos	HEXAGONES									
						Initial	Associés de l'initial						Séparés de l'initial		
T_{xy}	T_{xz}	T_{xu}	T_{xv}	T_{xw}	x	V^x_{yz}	V^x_{yu}	V^x_{yv}	V^x_{yw}	V^x_{zu}	V^x_{zv}	V^x_{zw}	V^x_{uv}	V^x_{uw}	V^x_{vw}
						Conjugués de l'initial	Voisins de l'initial			Unicollatéraux de 1re espèce de l'initial			Bicollatéraux de 1re espèce de l'initial		
T_{yx}	T_{yz}	T_{yu}	T_{yv}	T_{yw}	y	V^y_{xz}	V^y_{xu}	V^y_{xv}	V^y_{xw}	V^y_{zu}	V^y_{zv}	V^y_{zw}	V^y_{uv}	V^y_{uw}	V^y_{vw}
T_{zx}	T_{zy}	T_{zu}	T_{zv}	T_{zw}	z	V^z_{xy}	V^z_{xu}	V^z_{xv}	V^z_{xw}	V^z_{yu}	V^z_{yv}	V^z_{yw}	V^z_{uv}	V^z_{uw}	V^z_{vw}
						Unicollatéraux de 2e espèce de l'initial		Bicollatéraux de 2e espèce de l'initial		Isodiagonaux de l'initial	Tricollatéraux vulgaires de l'initial				Opposés de l'initial
T_{ux}	T_{uy}	T_{uz}	T_{uv}	T_{uw}	u	V^u_{xy}	V^u_{xz}	V^u_{xv}	V^u_{xw}	V^u_{yz}	V^u_{yv}	V^u_{yw}	V^u_{zv}	V^u_{zw}	V^u_{vw}
T_{vx}	T_{vy}	T_{vz}	T_{vu}	T_{vw}	v	V^v_{xy}	V^v_{xz}	V^v_{xu}	V^v_{xw}	V^v_{yz}	V^v_{yu}	V^v_{yw}	V^v_{zu}	V^v_{zw}	V^v_{uw}
T_{wx}	T_{wy}	T_{wz}	T_{wu}	T_{wv}	w	V^w_{xy}	V^w_{xz}	V^w_{xu}	V^w_{xv}	V^w_{yz}	V^w_{yu}	V^w_{yv}	V^w_{zu}	V^w_{zv}	V^w_{uv}

Tableau des coordonnées des sommets, côtés et points diagonaux de l'hexangle pascalien, un trilatère T_{xy} étant pris pour référence, et l'axe d'homologie de ce trilatère avec le trilatère T_{xz} pour droite-unité.

$$(XYZ) = T_{xy}, \quad (X'Y'Z') = T_{xz},$$
$$(AE, BD, CF) = T_{xu}, \quad (AC, FD, BE) = T_{xv}, \quad (BF, CE, AD) = T_{xw}.$$



Sommets.

A : (o, c, — 1); B : (o, 1, — b); C : (b, — 1, o); D : (1, — a, o);
E : (1, o, — a); F : (c, o, — 1).

Cotés.

AB : (1, o, o); BC : (1, b, 1); CD : (o, o, 1); DE : (a, 1, 1); EF : (o, 1, o);
FA : (1, 1, c); AD : (a, 1, c); BE : (a, b, 1); CF : (1, b, c);
AC : (1, b, bc); BD : (ab, b, 1); CE : (a, ab, 1); DF : (a, 1, ac);
AE : (ac, 1, c); BF : (1, bc, c).

Points diagonaux Q.

$zu.vw$ CD.EF	1, o, o.	$xz.uw$ BD.CE	$ab - b$, $ab - a$, $ab - a^2b^2$.
$yu.vw$ AF.BC	$1 - bc$, $c - 1$, $b - 1$.	$xy.vw$ DF.CE	$1 - a^2bc$, $a^2c - a$, $a^2b - a$.
$yz.vw$ BD.AE	$1 - bc$, $abc - ac$, $abc - ab$.	$xy.uw$ AE.BF	$bc^2 - c$, $ac^2 - c$, $1 - abc^2$.
$yz.uw$ AC.DF	$abc - bc$, $abc - ac$, $1 - ab$.	$xy.uv$ BD.AC	$b^2c - b$, $1 - ab^2c$, $ab^2 - b$.
$xu.vw$ BE.AD	$1 - bc$, $ac - a$, $ab - a$.	$yz.uv$ BF.CE	$abc - bc$, $1 - ac$, $abc - ab$.
$xz.vw$ AC.BF	$bc - b^2c^2$, $bc - c$, $bc - b$.	$xz.uv$ AE.DF	$ac - c$, $ac - a^2c^2$, $ac - a$.

Points diagonaux Q (*suite*).

$\frac{xy.zw}{BC.AD}$	$bc-1,\ a-c,\ 1-ab.$	$\frac{xz.yu}{CF.AB}$	$0,\ c,\ -b.$
$\frac{xy.zv}{AF.BE}$	$1-bc,\ ac-1,\ b-a.$	$\frac{zw.uv}{AB.CD}$	$0,\ 1,\ 0.$
$\frac{xy.zu}{DE.CF}$	$c-b,\ 1-ac,\ ab-1.$	$\frac{yw.uv}{DE.AF}$	$c-1,\ 1-ac,\ a-1.$
$\frac{zv.wu}{AB.EF}$	$0,\ 0,\ 1.$	$\frac{yw.zv}{CF.BD}$	$bc-b,\ 1-abc,\ b^2a-b.$
$\frac{yv.wu}{BC.DE}$	$b-1,\ a-1,\ 1-ab.$	$\frac{yw.zu}{BE.AC}$	$b^2c-b,\ 1-abc,\ ba-b.$
$\frac{yv.zw}{AE.CF}$	$cb-c,\ c^2a-c,\ 1-abc.$	$\frac{xw.uv}{CF.BE}$	$bc-b,\ 1-ac,\ ba-b.$
$\frac{yu.zw}{DF.BE}$	$1-abc,\ a^2c-a,\ ab-a.$	$\frac{xw.zv}{DE.AC}$	$bc-b,\ 1-abc,\ ab-1.$
$\frac{xv.wu}{AD.CF}$	$cb-c,\ ca-c,\ 1-ab.$	$\frac{xw.zu}{AF.BD}$	$bc-1,\ 1-abc,\ ab-b.$
$\frac{xv.wz}{BF.DE}$	$bc-c,\ ac-1,\ 1-abc.$	$\frac{xw.yv}{AB.DF}$	$0,\ ac,\ -1.$
$\frac{xu.zw}{CE.AF}$	$1-abc,\ ac-1,\ ab-a.$	$\frac{xw.yu}{CD.AE}$	$1,\ -ac,\ 0.$
$\frac{xv.yw}{CE.AB}$	$0,\ 1,\ -ab.$	$\frac{xv.yu}{EF.BD}$	$1,\ 0,\ -ab.$
$\frac{xu.yw}{BF.CD}$	$bc,\ -1,\ 0.$	$\frac{yv.zu}{AD.BF}$	$c^2b-c,\ ca-c,\ 1-abc.$
$\frac{xu.yv}{AC.EF}$	$bc,\ 0,\ -1.$	$\frac{xv.zu}{BC.AE}$	$bc-1,\ ac-c,\ 1-abc.$
$\frac{yu.zv}{CE.AD}$	$1-abc,\ ac-a,\ a^2b-a.$	$\frac{xw.yz}{EF.BC}$	$1,\ 0,\ -1.$
$\frac{xu.zv}{DF.BC}$	$1-abc,\ ac-a,\ ab-1.$	$\frac{xv.yz}{CD.AF}$	$1,\ -1,\ 0.$
$\frac{xz.yw}{AD.EF}$	$c,\ 0,\ -a.$	$\frac{xu.yz}{AB.DE}$	$0,\ 1,\ -1.$
$\frac{xz.yv}{BE.CD}$	$b,\ -a,\ 0.$		

La notation $\frac{zu.vw}{CD.EF}$ signifie « *point diagonal* $Q_{zu.vw}$ », intersection des côtés CD et EF du trilatère T_{xy}.

La disposition du Tableau des points diagonaux a été détruite à l'impression à cause de l'insuffisance de largeur de la feuille. Il doit être établi sur quinze lignes, comprenant chacune trois points diagonaux, *sommets d'un même trilatère*.

taires des triplets des précédentes paires sont toujours *distincts et conjugués*, tandis que les deux triplets de la paire des réciproques ont *même complémentaire* V^x_{yz}, qui sera *le correspondant* de la paire.

Dans la figure schématique représentative du système de Kirkmann, les hexagones de deux triplets réciproques sont représentés par les sommets de deux triangles *réciproques*, c'est-à-dire *homologiques*, le centre de cette homologie étant le point représentatif de l'hexagone *correspondant* de la paire (*commun complémentaire*).

Les triplets *d'associés* sont au nombre de 120 (20 dans chaque système, formant 10 paires de triplets réciproques). Ils se groupent encore de deux façons (soit *conjugalement*, soit *diagonalement*) en 60 paires de triplets homologues (correspondant aux 60 hexagones).

Nous appelons enfin « paire de triplets *irrégulièrement homologues* », soit la paire de triplets *d'isodiagonaux* $W^{(w)}_{xy}$ et $W^{(w)}_{yz}$, soit la paire de triplets *d'associés* $W^x_{w(z)}$ et $W^y_{w(z)}$. Les trois paires d'hexagones homologues des deux triplets comprennent, pour le premier système, une paire de conjugués et deux paires d'associés; et pour le second système, une paire de conjugués et deux paires d'isodiagonaux.

Deux tels triplets *d'isodiagonaux* appartiennent, tout comme ceux de la paire de triplets associativement homologues, à deux quadruplets d'isodiagonaux *à membres diagonaux xy et xz séparés;* réciproquement deux tels quadruplets fournissent *trois paires de triplets irrégulièrement homologues*.

De même, les deux quadruplets *d'associés* W^x_w et W^y_w fournissent trois paires de triplets irrégulièrement homologues.

Note. — Les triplets de chacune des précédentes paires ont été qualifiées *d'homologues*, parce que, dans le cas de l'hexangle *pascalien*, les triangles de pascales des deux triplets d'une même paire *d'homologues* sont *homologiques*.

CHAPITRE XIII.

L'HEXANGLE PASCALIEN.

1. Hexangle pascalien, pascales et points de Steiner. — 2. Configuration des points de Steiner et axes de Steiner-Plücker, ou ossature ponctuelle. — 3. Points de Kirkmann; répartition des pascales et des kirkmanns en six figures polaires. — 4. Droites de Cayley-Salmon et centres de Salmon; ossature réglée. — 5. Ossature symétrique totale de la configuration. — 6. Points et droites de Bally; fausses pascales et faux kirkmanns.

1. Nous disons qu'un hexangle est *pascalien* si deux trilatères de cet hexangle *séparés* sont *homologiques* (¹), deux côtés homologues de cette homologie étant *opposés* dans l'hexagone de ces trilatères.

L'hexagone de ces deux trilatères est alors *pascalien*, ses trois points diagonaux principaux étant alignés sur l'axe d'homologie de ses trilatères, qui sera, par définition, *la pascale* de cet hexagone; il résulte alors du *postulat de Pappus*, ainsi qu'on l'a montré (Chap. I, § VII, 2), qu'il en est de même pour un hexagone *voisin*, et par suite pour tout hexagone du même hexangle, deux trilatères *quelconques* de l'hexangle *séparés* étant donc *homologiques* (²).

La pascale de l'hexagone V^x_{yz} sera représentée par le symbole h^x_{yz}.

Le quadrilatère de pascales des hexagones d'un quadruplet *d'associés* W^x_y ou *d'isodiagonaux* W_{xy}, sera désigné par h^x_y, ou h_{xy}; le triangle de pascales des hexagones du triplet d'associés $W^x_{y(z)}$, ou d'isodiagonaux $W^{(x)}_{yz}$, par $h^x_{y(z)}$, ou $h^{(x)}_{yz}$.

Il est intéressant de montrer que le caractère pascalien d'un hexagone peut s'étendre, *sans nul recours au postulat de Pappus*, à tout hexagone *du même système de Steiner* que le premier.

Théorème I. — *Si deux trilatères* (supposés sans sommet ni côté commun, et nul sommet de chacun n'étant uni à nul côté de l'autre)

(¹) et (²) Les Notes de ce Chapitre sont renvoyées à la fin du Livre.

sont homologiques, le troisième trilatère du triplet steinérien déterminé par les deux premiers (membre diagonal de l'hexagone qui a pour membres de structure les premiers, et pour paires de côtés opposés leurs paires de côtés homologues) *est homologique à chacun de ces premiers, et les trois homologies de ces trilatères deux à deux ont le même centre.*

Les côtés des deux trilatères donnés T_{xy} et T_{xz} étant respectivement désignés par (a, b, c) et (i, j, k), les deux trilatères (abk) et (ijc) sont homologiques par le même axe que les précédents, car ils ont mêmes paires de côtés opposés que ces précédents.

Les droites *concourantes* qui joignent les paires de sommets homologues des derniers trilatères sont : une droite de jonction de deux sommets homologues $(\overline{ab})$ et $(\overline{ij})$ des premiers, et deux diagonales principales $\overline{(\overline{bk})(\overline{jc})}$ et $\overline{(\overline{ka})(\overline{ci})}$ de l'hexagone V_{yz}^{x} de ces premiers.

Le point de concours de ces diagonales étant le sommet du troisième trilatère T_{yz} du triplet steinérien des premiers *simultanément homologue* (Chapitre précédent, 4) des sommets homologues $(\overline{ab})$ et $(\overline{ij})$ des premiers, on voit que les trois triples de sommets simultanément homologues des trois trilatères T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, sont *alignés* sur trois droites *concourant au centre d'homologie des deux premiers.*

Ces trois trilatères sont donc deux à deux homologiques par ce même centre. C. Q. D. F.

Les deux hexagones *conjugués* de l'hexagone des trilatères donnés, ayant chacun pour membres de structure le troisième trilatère et l'un des deux premiers, sont donc aussi pascaliens. Il en est de même des *trois opposés* du premier hexagone, puisque trois sommets deux à deux homologues *et par conséquent alignés* des trois trilatères précédents, tels $Q_{zu.vw}$, $Q_{yu.vw}$, $Q_{xu.vw}$, sont les points diagonaux principaux d'un hexagone V_{vw}^{u} *opposé* au premier V_{yz}^{x}.

De ce qui précède résulte immédiatement cette propriété de l'hexangle pascalien :

Théorème II. — *Les pascales des trois hexagones d'un même semi-système steinérien* (hexagones opposés d'un même quatrième) *sont concourantes en un point dénommé : point de Steiner de ce*

semi-système, ou de l'un quelconque des trois hexagones de ce semi-système.

Le point de Steiner du semi-système S_{xyz}, relatif aux trois hexagones V^x_{yz}, V^y_{zx}, V^z_{xy}, sera désigné par le symbole G_{xyz}, celui du semi-système *opposé* S_{uvw}, par G_{uvw}, et ces deux points formeront ***un couple de points opposés de Steiner.***

Il y a *dix couples* de points de Steiner (soit *vingt points* G) correspondant aux dix systèmes, c'est-à-dire *aux dix paires de **triangles complémentaires de l'hexangle.***

Le point de Steiner d'un semi-système est, comme on l'a vu, le centre d'homologie simultané des membres de structure et du membre diagonal de tout hexagone du semi-système opposé ([3]).

Les deux membres de structure et le membre diagonal d'un hexagone, étant trois triangles deux à deux homologiques par le même centre, forment avec leur centre commun d'homologie (point de Steiner du semi-système opposé), les trois droites de support de leurs triples de sommets simultanément homologues (pascales des hexagones du semi-système opposé), les trois axes de leurs homologies deux à deux (pascales des hexagones de son semi-système), le point de concours de ces trois axes (point de Steiner de ce semi-système), *une configuration* G(3, 6) (Chap. I, § IX, 3), laquelle est d'ailleurs *particulière*, car, de trois triangles deux à deux homologiques par le même centre, chacun n'est généralement pas le membre diagonal de l'hexagone qui a pour membres de structure les deux autres. Nous allons voir que les vingt points G de Steiner forment aussi une configuration G(3, 6).

2. Théorème III. — *Le triangle de pascales des hexagones d'un triplet d'associés et le trilatère de structure commun aux hexagones de ce triplet sont homologiques, l'axe étant la pascale de l'hexagone voisin de ce triplet.*

Considérant le triangle $h^x_{y(z)}$ et le trilatère T_{xy} (membre commun), aux côtés h^x_{yu} du premier et $d_{xy.zu.vw}$ du second est uni *le même point diagonal* $Q_{yu.zx}$, qui est donc *leur point de concours.*

De même, leurs côtés h^x_{yv} et $d_{xy.zv.wu}$ concourent en $Q_{yv.zx}$; leurs côtés h^x_{yw} et $d_{xy.zw.uv}$ concourent en $Q_{yw.zx}$, et ces trois points de

concours sont *les trois points diagonaux principaux* de l'hexagone V^y_{zx} *voisin* du triplet $W^x_{y(z)}$. C. Q. F. D.

La démonstration précédente est résumée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|ccc} h^x_{y(z)} & h^x_{yu}, & h^x_{yv}, & h^x_{yw} \\ T_{xy} & d_{xy.zu.vw}, & d_{xy.zv.wu}, & d_{xy.zw.uv} \\ \cline{2-4} & Q_{yu.zx}, & Q_{yv.zx}, & Q_{yw.zx} \\ & \multicolumn{3}{c}{\textit{alignés sur } h^y_{zx}.} \end{array}$$

Théorème IV. — *Les deux triangles de pascales des hexagones de deux triplets d'associés* conjugalement *homologues sont homologiques.*

Chacun de ces triangles $h^x_{y(z)}$, $h^y_{x(z)}$, étant homologique (Théorème III) au membre de structure T_{xy} commun aux hexagones de ces triplets, nous allons montrer que les trois trilatères $h^x_{y(z)}$, $h^y_{x(z)}$, T_{xy} *forment un triplet steinérien*, d'où résultera (Théorème I) le présent théorème.

Deux côtés des premiers triangles qui correspondent à un même côté du troisième T_{xy} dans les deux homologies de ces premiers et du troisième étant considérés comme homologues, il faut établir (Chapitre précédent, 4) *qu'au point de concours de deux côtés non homologues quelconques des premiers est toujours uni le côté simultanément non homologue du troisième.*

Or, à trois côtés *deux à deux non homologues* de ces trilatères (tels h^x_{yu}, h^y_{xv}, $d_{xy.uv.zw}$) est uni *un même* point diagonal ($Q_{xv.yu}$). C. Q. F. D.

Nous dirons que deux quadrilatères sont *raccordables* si, leurs côtés étant deux à deux associés (un côté de l'un et un côté de l'autre) en paires de côtés dits *correspondants*, les centres des quatre paires de leurs côtés correspondants *sont alignés*. Leur droite d'alignement s'appellera *l'axe de raccordement* de ces quadrilatères.

Deux triangles *correspondants* quelconques de ces quadrilatères sont alors *homologiques* par cet axe de raccordement, les centres des quatre homologies, *en général distincts* (si les quadrilatères ne sont pas homologiques), formant un *quadrangle* dont les six côtés sont les six droites de jonction des six paires de sommets correspondants des quadrilatères; ce quadrangle s'appellera *le quadrangle de raccordement* des deux quadrilatères; il est *polairement circonscrit* (Chap. I, § III, 5) à chacun d'eux.

Inversement, les côtés de deux quadrilatères étant l'un à l'un associés en paires de côtés correspondants, si chacune de deux paires de *triangles* correspondants de ces quadrilatères est formée de triangles homologiques (où deux côtés *homologues dans l'homologie* soient deux côtés *correspondants* des quadrilatères), *il en sera de même de chacune des deux autres paires de triangles*, ces quatre homologies auront toutes *le même axe* (deux triangles quelconques d'un même quadrilatère ayant toujours deux côtés communs), et les deux quadrilatères sont raccordables par cet axe.

Corrélativement, deux quadrangles dont les sommets se correspondent biunivoquement et dont les quatre paires de sommets correspondants ont leurs droites de support *concourantes*, sont dits *raccordables;* ce point de concours est *le centre de raccordement* des deux quadrangles; deux quelconques de leurs triangles correspondants sont homologiques par ce centre, les axes de ces quatre homologies, *en général distincts*, constituant *le quadrilatère de raccordement* de ces quadrangles, *polairement inscrit* à chacun d'eux.

Théorème V. — *Les deux quadrilatères de pascales des hexagones de deux quadruplets d'associés conjugalement homologues* W_y^x *et* W_x^y *sont raccordables.*

(On considérera comme *côtés correspondants* dans ces quadrilatères les pascales de deux hexagones *conjugués* telles h_{yu}^x et h_{xu}^y.)

Les divers *triangles correspondants* de ces quadrilatères sont, en effet, *homologiques* (Théorème IV).

L'axe de raccordement de ces deux quadrilatères h_y^x et h_x^y s'appellera *l'axe de Steiner-Plücker* relatif à la combinaison xy des systèmes de Kirkmann x et y auxquels appartiennent respectivement les deux quadruplets, ou encore au trilatère T_{xy} membre de structure commun aux hexagones de ces deux quadruplets, et sera désigné par le symbole j_{xy}.

Théorème VI. — *A l'axe de Steiner-Plücker* j_{xy} *sont unis les quatre points de Steiner*

$$G_{xyz},\quad G_{xyu},\quad G_{xyv},\quad G_{xyw}.$$

Car deux côtés correspondants quelconques des quadrilatères

précédents, soit h^x_{yu} et h^y_{xu}, étant les pascales de deux hexagones *conjugués*, leur point de concours, *uni à l'axe de raccordement* j_{xy}, n'est autre que *le point de Steiner* G_{xyu} de leur semi-système.

THÉORÈME VII. — *Au point de Steiner* G_{xyz} *sont unis les trois axes de Steiner-Plücker*

$$j_{xy}, \quad j_{yz}, \quad j_{zx}.$$

Ce dernier théorème résulte du précédent.

Il y a *quinze axes j de Steiner-Plücker* correspondant *aux quinze trilatères* T de l'hexangle.

La notation et les relations d'appartenance des points et axes G et j étant *celles mêmes des éléments d'une configuration* G(3, 6), les vingt points G et les quinze axes j forment une configuration G(3, 6), que nous appellerons *l'ossature ponctuelle de la configuration pascalienne*, les points de Steiner et les axes de Steiner-Plücker s'appelant alors respectivement les *points* et les *axes* de cette ossature ponctuelle.

La configuration G(3, 6), déterminée (Chap. I, § IX, 3) par trois triangles deux à deux homologiques *par le même centre*, peut être considérée comme la projection sur son plan de la configuration du plan quaternaire déterminée par trois triangles (de plans distincts) *perspectifs par le même centre* ou, ce qui revient au même, comme la projection *des droites et points d'intersection d'un système de six plans arbitraires* (les trois plans des triangles en perspective et les trois plans de leur trièdre de perspective).

On peut aussi l'envisager comme *la trace*, sur son plan ternaire, *des plans ternaires et quaternaires de jonction de six points d'un même plan quinquennaire*, formant une véritable configuration propre de ce dernier (Chap. I, § III, 2), telle que nulle droite de cette configuration surabondante ne soit incidente au plan ternaire de la configuration G(3, 6).

Chacun des six sommets de la configuration quinquennaire étant en effet représenté par l'un des six indices x, y, z, u, v, w, la trace du plan ternaire xyz (laquelle est un point) étant désignée par G_{xyz} et la trace du plan quaternaire $xyzu$ (laquelle est une droite) étant désignée par j_{vw}, les vingt points G et les quinze droites j sont tels que tout point G est uni à toute droite j dont les deux indices figurent dans la combinaison ternaire attachée à G.

Sur un plan quaternaire portant le plan ternaire de la configuration G(3, 6) et reposant sur le plan de la configuration quinquennaire, la trace de cette dernière est (Chap. III, 5) *une configuration homologique du plan quaternaire* (constituée par deux tétraèdres homologiques, le centre et le plan axial d'homologie, les éléments de jonction et d'intersection de paires d'éléments homologues).

La configuration G(3, 6) peut donc être considérée comme la trace, sur son plan ternaire, *d'une configuration homologique quaternaire.*

3. On rencontrera souvent, dans la suite, des démonstrations qui sont établies par un double schéma du type général suivant (dont les deux schémas constituants sont analogues au schéma qui résume la démonstration du Théorème III) :

T_1	$A_1,\ B_1,\ C_1$	$a_1,\ b_1,\ c_1$
T_2	$A_2,\ B_2,\ C_2$	$a_2,\ b_2,\ c_2$
	$a,\ b,\ c$	$A,\ B,\ C$

Voici la description de ce double schéma :

Sur les deux moitiés de chacune des premières lignes sont inscrits les éléments (sommets, côtés) de chacun des deux triangles T_1 et T_2, le sommet X_k et le côté x_k de même rang étant *opposés* dans le triangle T_k. La troisième ligne porte les droites de jonction a, b, c des sommets homologues (de même rang) des deux triangles et les points de concours A, B, C de leurs côtés homologues.

Si ces derniers sont alignés, les premières sont concourantes, et inversement.

Pour s'assurer de l'exactitude d'un tel schéma, on vérifiera : 1° que chaque élément d'une moitié de chacune des premières lignes est uni aux deux éléments *de rang différent* de l'autre moitié *de cette même ligne;* 2° que chaque élément de la *troisième* ligne est uni aux deux éléments des lignes précédentes qui lui sont verticalement superposés. Cette constatation se fait toujours au premier coup d'œil, si l'on est bien familiarisé avec la notation employée (*voir* Chapitre précédent, 5, note 1), et que l'on tienne compte des propriétés qui seront au fur et à mesure établies.

Théorème VIII. — *Le triangle de pascales des hexagones d'un triplet* d'isodiagonaux, *et l'un quelconque des deux membres de*

structure de l'hexagone complémentaire *de ce triplet sont homologiques, l'axe étant la pascale de cet hexagone complémentaire.*

Théorème IX. — *Les pascales des trois hexagones d'un même sous-système de Kirkmann sont concourantes.*

Les triangles envisagés dans le Théorème VIII sont $h_{xy}^{(z)}$ et T_{yz} ou T_{xz}. Les trois pascales envisagées dans le Théorème IX sont h_{vw}^{x}, h_{wu}^{x}, h_{uv}^{x}.

Les deux démonstrations sont simultanément données par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
h_{xy}^{(z)} & h_{xy}^{u}, & h_{xy}^{v}, & h_{xy}^{w} & Q_{vw.xy}, & Q_{wu.xy}, & Q_{uv.xy} \\
T_{yz} & d_{yz.vw.xu}, & d_{yz.wu.xv}, & d_{yz.uv.xw} & Q_{vw.xu}, & Q_{wu.xv}, & Q_{uv.xw} \\
\cline{2-7}
 & Q_{xy.zu}, & Q_{xy.zv}, & Q_{xy.zw} & h_{vw}^{x}, & h_{wu}^{x}, & h_{uv}^{x} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } h_{xy}^{z}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes.}}
\end{array}$$

C.Q.F.D.

Le point de concours des pascales des trois hexagones d'un même sous-système de Kirkmann s'appellera *le kirkmann de l'hexagone simultanément séparé des trois hexagones du sous-système.*

Ainsi, le point de concours des trois pascales précédentes h_{vw}^{x}, h_{wu}^{x}, h_{uv}^{x}, est le kirkmann de l'hexagone V_{yz}^{x}.

Ce point sera représenté par le symbole H_{yz}^{x}.

Le quadrangle de kirkmanns des hexagones d'un quadruplet *d'associés* W_{y}^{x} et celui des hexagones d'un quadruplet *d'isodiagonaux* W_{xy} seront respectivement désignés par H_{y}^{x} et H_{xy}; le triangle relatif au triplet *d'associés* $W_{y(z)}^{x}$ ou *d'isodiagonaux* $W_{xy}^{(z)}$, par $H_{y(z)}^{x}$ ou $H_{xy}^{(z)}$.

Le kirkmann et la pascale de chacun de deux hexagones *séparés* sont respectivement unis à la pascale et au kirkmann de l'autre.

A chaque pascale, telle h_{yz}^{x}, *sont donc inversement unis trois kirkmanns* (H_{vw}^{x}, H_{wu}^{x}, H_{uv}^{x}), *qui sont ceux des trois hexagones séparés de celui auquel appartient la pascale.*

Il résulte de ce qui a été dit (Chapitre précédent, 7 et 8) au sujet des relations d'appartenance entre les 10 hexagones d'un même système de Kirkmann et les 10 sous-systèmes de ce système, que :

Les pascales et les kirkmanns des hexagones d'un même système de Kirkmann forment une figure polaire, où la pascale et

le kirkmann d'un même hexagone sont deux éléments réciproques.

Les 60 pascales et les 60 kirkmanns correspondants se répartissent donc en six figures polaires, qui seront respectivement désignées par $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$, la figure x_1, par exemple, correspondant au système (x) de Kirkmann ([4]).

Nous appelons *triangle*, *quadrangle*, *quadrilatère* d'une figure x_1 de Kirkmann, un triangle, un quadrangle, un quadrilatère, dont tous les éléments, *sommets et côtés*, sont des éléments de cette figure.

Les 20 *triangles* d'une telle figure forment 10 *paires de triangles réciproques*, deux triangles d'une même paire de réciproques étant homologiques relativement à un point et à une droite réciproques de la figure, kirkmann et pascale d'un même hexagone, *commun complémentaire des deux triplets réciproques* (Chapitre précédent, 10) *dont chacun a pour pascales les côtés de l'un des triangles, et pour kirkmanns les sommets de l'autre.*

Un même triangle de cette figure peut être considéré soit comme le triangle de *pascales* des hexagones d'un triplet *d'associés*, soit comme le triangle de *kirkmanns* des hexagones d'un second triplet d'associés, *réciproque du premier*. Autrement dit, les triangles $h^x_{y(z)}$ et $\mathrm{H}^x_{z(y)}$ coïncident.

Les quadrangles et quadrilatères de la figure sont les quadrangles de kirkmanns et les quadrilatères de pascales des hexagones de quadruplets d'associés; il y a cinq quadrangles et cinq quadrilatères correspondants aux cinq quadruplets du système. Le quadrangle et le quadrilatère *d'un même quadruplet* sont *réciproques* dans la figure, et le quadrangle de kirkmanns des hexagones d'un quadruplet d'associés est *polairement circonscrit* au quadrilatère de pascales de ces mêmes hexagones.

4. Théorème X. — *Les trois kirkmanns des trois hexagones d'un même semi-système de Steiner sont alignés.*

On considérera les deux triangles de pascales $h^{(z)}_{xy}$ et $h^{(y)}_{xz}$ des deux triplets *associativement homologues d'isodiagonaux* $\mathrm{W}^{(z)}_{xy}$ et $\mathrm{W}^{(y)}_{xz}$; ces deux triangles sont homologiques ([5]), comme l'indique le schéma suivant, *par le kirkmann de l'hexagone* V^x_{yz} *correspondant de la*

paire de triplets :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} h^{(z)}_{xy} & h^u_{xy}, & h^v_{xy}, & h^w_{xy} & Q_{xy.vw}, & Q_{xy.wu}, & Q_{xy.uv} \\ h^{(y)}_{xz} & h^u_{xz}, & h^v_{xz}, & h^w_{xz} & Q_{xz.vw}, & Q_{xz.wu}, & Q_{xz.uv} \\ \cline{2-7} & H^u_{vw}, & H^v_{wu}, & H^w_{uv}. & h^x_{vw}, & h^x_{wu}, & h^x_{uv} \end{array}$$

sont alignés, puisque sont concourantes en H^x_{yz}.

La droite d'alignement de ces trois kirkmanns, qui sont ceux des trois hexagones du même semi-système de Steiner S_{uvw}, s'appellera *droite de Cayley-Salmon* de ce semi-système (ou de l'un quelconque des ses trois hexagones); elle sera représentée par le symbole g_{uvw} (6).

Théorème XI. — *La droite de Cayley-Salmon d'un semi-système steinérien est unie au point de Steiner du semi-système opposé.*

On considérera les deux triangles *de pascales* des deux triplets *d'isodiagonaux* $W^{(w)}_{yz}$ et $W^{(w)}_{zx}$ *irrégulièrement homologues* (fin du Chapitre précédent) :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} h^{(w)}_{yz} & h^x_{yz}, & h^u_{yz}, & h^v_{yz} & Q_{uv.yz}, & Q_{vx.yz}, & Q_{xu.yz} \\ h^{(w)}_{zx} & h^y_{zx}, & h^u_{zx}, & h^v_{zx} & Q_{uv.zx}, & Q_{vy.zx}, & Q_{yu.zx} \\ \cline{2-7} & G_{xyz}, & H^u_{vw}, & H^v_{wu} & h^z_{uv}, & d_{xy.zv.wu}, & d_{xy.zu.vw} \end{array}$$

sont alignés, puisque sont concourantes en $Q_{uv.zw}$.

La droite de jonction des points H^u_{vw} et H^v_{wu}, *qui est la droite de Cayley-Salmon* g_{uvw}, est donc unie à G_{xyz} (7). C. Q. F. D.

On peut remarquer que cette démonstration entraîne le théorème précédent, dont nous avons d'ailleurs donné la démonstration directe, parce qu'elle nous fournira un procédé général sur lequel on reviendra ultérieurement (Chap. XIV, 2).

Théorème XII. — *Les deux triangles* de kirkmanns *des hexagones de deux triplets* d'associés conjugalement homologues *sont homologiques, l'axe étant la pascale de l'hexagone* correspondant *de la paire de triplets.*

Théorème XIII. — *Les quatre droites de Cayley-Salmon* g_{xyz}, g_{xyu}, g_{xyv}, g_{xyw}, *sont concourantes.*

Les triangles envisagés dans le Théorème XII sont $H^x_{y(z)}$ et $H^y_{x(z)}$; et pour établir le Théorème XIII, il suffit de montrer que trois quelconques des quatre droites g mentionnées sont concourantes.

Les deux démonstrations sont simultanément données par le schéma suivant :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} \mathrm{H}_y^x(z) & \mathrm{H}_{yu}^x, & \mathrm{H}_{yv}^x, & \mathrm{H}_{yw}^x & h_{zu}^x, & h_{zv}^x, & h_{zw}^x \\ \mathrm{H}_x^y(z) & \mathrm{H}_{xu}^y, & \mathrm{H}_{xv}^y, & \mathrm{H}_{xw}^y & h_{zu}^y, & h_{zv}^y, & h_{zw}^y \\ \cline{2-7} & g_{xyu}, & g_{xyv}, & g_{xyw} & \mathrm{Q}_{xy.zu}, & \mathrm{Q}_{xy.zv}, & \mathrm{Q}_{xy.zw} \end{array}$$

sont concourantes, puisque *sont alignés sur* h_{xy}^z.

Théorème XIV. — *Les deux quadrangles* de kirkmanns *des hexagones de deux quadruplets d'associés conjugalement homologues sont* raccordables.

Car, d'après le Théorème XII, deux triangles homologues quelconques de ces quadrangles sont homologiques.

Les quatre homologies des quatre paires de triangles homologues de ces quadrangles sont donc *toutes de même centre* (2); les quatre droites de jonction des quatre paires de sommets homologues, *qui sont les quatre droites g du Théorème XIII*, concourent en ce centre de raccordement, qui sera dénommé *centre de Salmon*, relatif à la paire de quadruplets envisagés, ou au trilatère de structure commun aux hexagones de ces quadruplets.

Le centre de Salmon relatif à la paire de quadruplets W_y^x et W_x^y, ou au trilatère T_{xy}, sera représenté par le symbole J_{xy}.

(Le *quadrilatère de raccordement* des quadrangles de kirkmanns de ces deux quadruplets, qui a pour côtés les axes des quatre homologies de leurs quatre paires de triangles homologues, est *le quadrilatère de pascales* des hexagones du quadruplet *d'isodiagonaux* W_{xy}, *homologue conjugal simultané des deux quadruplets d'associés* W_y^x et W_x^y.

Ce quadrilatère de pascales, *qui a pour sommets les points principaux de ses pascales*, est *polairement inscrit* à chacun des quadrangles de kirkmanns H_y^x et H_x^y des deux quadruplets d'associés, *ainsi d'ailleurs qu'au quadrangle* H_{xy} *des kirkmanns de son propre quadruplet*, comme on le verra au n° 3 du Chapitre suivant.)

Théorème XV. — *La droite de Cayley-Salmon* g_{xyz} *est unie aux trois centres de Salmon* J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}; *et le centre de Salmon* J_{xy} *est uni aux quatre droites de Cayley-Salmon :* g_{xyz}, g_{xyu}, g_{xyv}, g_{xyw}.

Cette proposition est un simple corollaire des théorèmes précédents.

Il en résulte aussitôt que les 20 droites g et les 15 centres J forment une configuration $g(3, 6)$, d'espèce corrélative de celle des points de Steiner, et que nous appellerons *l'ossature réglée de la configuration pascalienne*, les droites de Cayley-Salmon étant *les droites*, et les centres de Salmon *les centres* de cette ossature.

Une telle configuration, déterminée par trois triangles deux à deux homologiques *par le même axe*, peut être envisagée comme la trace sur son plan des droites et plans ternaires de jonction de six points d'un même plan quaternaire (uni au plan de la configuration). (Les droites unies à trois de ces points x, y, z, sauf les côtés du triangle xyz, sont en effet *les projetantes d'un même triangle* uvw, et leurs traces sont *trois triangles deux à deux homologiques par le même axe*, *trace du plan* uvw, les côtés du triangle xyz ayant pour traces les trois centres d'homologie, alignés sur la trace du plan xyz.)

La configuration $g(3, 6)$ peut être aussi considérée comme la trace des plans *ternaires et quaternaires* de jonction des sept sommets d'un *heptangle du plan quinquennaire*, *unis à un même sommet de cet heptangle* (et nulle arête binaire de l'heptangle n'étant incidente au plan de la configuration).

Car sur un plan quaternaire à la fois uni au plan quinquennaire de l'heptangle et au plan ternaire de la $g(3, 6)$, les traces des plans *ternaires et quaternaires de l'heptangle unis à un même de ses sommets* sont évidemment les droites et plans ternaires de jonction de six points, *projections des six autres sommets de l'heptangle par le sommet envisagé*.

5. L'*ossature totale* de la configuration pascalienne comprend donc les deux ossatures ponctuelle et réglée précédentes, d'espèces corrélatives, et reliées par leurs points et droites de semi-systèmes opposés, G_{xyz} et g_{uvw} étant, ainsi qu'on l'a vu (Théorème XII), *unis*.

Cette ossature totale, dont nulle des deux composantes n'est dualistiquement symétrique, *est dualistiquement symétrique*.

Posons en effet

$$G_{xyz} = G'_{uvw}, \qquad g_{xyz} = g'_{uvw};$$

et, t étant un *septième* indice distinct de x, y, z, u, v, w, posons

$$J_{xy} = G'_{txy}, \qquad j_{xy} = g'_{txy}.$$

Les relations caractéristiques de la configuration, savoir :

$$\begin{array}{l} G_{xyz},\quad G_{xyu},\quad G_{xyv},\quad G_{xyw},\quad \textit{alignés sur } j_{xy};\\ J_{xy},\quad J_{yz},\quad J_{zx},\quad G_{uvw},\quad \textit{alignés sur } g_{xyz};\\ g_{xyz},\quad g_{xyu},\quad g_{xyv},\quad g_{xyw},\quad \textit{concourantes en } J_{xy};\\ j_{xy},\quad j_{yz},\quad j_{zx},\quad g_{uvw},\quad \textit{concourantes en } G_{xyz},\end{array}$$

deviennent alors :

$$\begin{array}{l} G'_{uvw},\quad G'_{vwz},\quad G'_{wzu},\quad G'_{zuv},\quad \textit{alignés sur } g'_{txy};\\ G'_{txy},\quad G'_{tyz},\quad G'_{tzx},\quad G'_{xyz},\quad \textit{alignés sur } g'_{uvw};\\ g'_{uvw},\quad g'_{vwz},\quad g'_{wzu},\quad g'_{zuv},\quad \textit{concourantes en } G'_{txy};\\ g'_{txy},\quad g'_{tyz},\quad g'_{tzx},\quad g'_{xyz},\quad \textit{concourantes en } G'_{uvw};\end{array}$$

relations qui se traduisent ainsi :

« *La configuration d'ossature totale comprend* 35 *points et* 35 *droites, qui peuvent être affectés* (chaque point et chaque droite) *d'une combinaison ternaire de sept indices distincts : t, x, y, z, u, v, w, de telle sorte que deux éléments* d'espèces différentes (point et droite), *affectés de deux combinaisons ternaires* qui n'aient nul indice commun *soient toujours* unis; *chaque élément est donc uni aux quatre éléments d'espèce corrélative qui sont respectivement affectés des quatre combinaisons ternaires des quatre indices* étrangers *à la combinaison ternaire de l'élément considéré.* »

Des modes de génération précédemment donnés pour la G(3, 6) et la g(3, 6) à partir d'une configuration quinquennaire, il résulte que :

« *La configuration d'ossature totale est la trace sur son plan des plans* ternaires et quaternaires *de jonction des sept sommets d'un heptangle quinquennaire* » (dont nulle arête binaire n'est incidente au plan de la configuration).

Elle se décompose de sept façons distinctes en deux configurations *complémentaires*, une G(3, 6) et une g(3, 6), la première étant la trace d'un hexangle de l'heptangle quinquennaire, et la deuxième la trace des éléments ternaires et quaternaires de l'heptangle unis au sommet complémentaire de l'hexangle précédent.

Cette décomposition se lit aussi sur la dernière notation donnée; la décomposition en les deux constituantes primitives se fait sur le

septième indice introduit t; il y a six autres décompositions se faisant sur chacun des six autres indices x, y, z, u, v, w, et que l'on peut rattacher à chacun des six systèmes de Kirkmann [8].

Si l'on ne veut pas faire intervenir le plan quinquennaire, on peut considérer la configuration d'ossature totale comme *la trace de la configuration quaternaire* qui est elle-même *la trace de l'heptangle quinquennaire :* configuration déterminée *par trois tétraèdres* (projection d'un même tétraèdre de l'heptangle par chacun des trois sommets du triangle complémentaire) *deux à deux homologiques par le même plan axial* (trace du plan quaternaire du tétraèdre précédent), *les trois centres d'homologie* (traces des côtés du triangle complémentaire) *étant alignés* (sur la trace du plan ternaire de ce triangle).

Toute figure homologique de cette configuration *quaternaire* (deux de ses tétraèdres, leur centre et plan axial, etc.) détermine une G(3, 6), la g(3, 6) *complémentaire* étant alors déterminée par *l'hexangle quaternaire* qui a pour sommets ceux du troisième tétraèdre (simultanément homologique aux deux premiers) et ses deux centres respectifs d'homologie avec les deux premiers.

6. Nous avons vu qu'à chaque trilatère T_{xy} de l'hexangle pascalien correspondent univoquement un axe de Steiner-Plücker j_{xy} et un centre de Salmon J_{xy}.

Désignant respectivement par $(T, j)_{xy}$ et $(T, J)_{xy}$ le quadrilatère et le quadrangle qui résultent de l'association du trilatère T_{xy} et de l'axe de Steiner-Plücker ou du centre de Salmon correspondants, les *sommets* du quadrilatère $(T, j)_{xy}$ sont, d'une part, trois points diagonaux de l'hexangle, sommets du trilatère T_{xy}, et, d'autre part, trois *nouveaux* points (alignés sur l'axe de Steiner-Plücker j_{xy}), que nous appellerons *points de Bally* (si toutefois ces éléments n'ont pas encore été jusqu'ici mentionnés).

De même, les côtés du quadrangle $(T, J)_{xy}$ sont, d'une part, trois côtés de l'hexangle, côtés du trilatère T_{xy}, et, d'autre part, trois droites, unies au centre de Salmon J_{xy}, et que nous appellerons *droites de Bally*.

Nous désignerons par l'expression $B_{zu.vw}$ le point de Bally qui est le point de concours de l'axe de Steiner-Plücker j_{xy} et du côté $d_{xy.zu.vw}$ du trilatère T_{xy}; la droite de Bally, qui unit le centre de

Salmon J_{xy} au sommet $Q_{zu.vw}$ du trilatère T_{xy}, sera désignée par l'expression $b_{zu.vw}$.

Les points de Bally sont trois par trois unis à chaque axe de Steiner-Plücker (traces, sur cet axe, des côtés du trilatère correspondant), et trois par trois unis à chaque côté de l'hexangle (traces, sur ce côté, des trois axes de Steiner-Plücker correspondant aux trois trilatères qui admettent ce côté); ils sont au nombre de 45.

Les droites de Bally, au nombre de 45, sont trois par trois unies à chaque centre de Salmon, et *une par une à chaque point diagonal*, sommet d'un unique trilatère de l'hexangle.

Les points de Bally sont en outre trois par trois alignés sur d'autres droites, au nombre de 60, qui correspondent biunivoquement aux 60 hexagones de l'hexangle, et que nous appellerons *les fausses pascales* de ces hexagones. De même que la pascale, la fausse pascale d'un hexagone sera unie au point de Steiner du semi-système steinérien de cet hexagone.

Les droites de Bally seront trois par trois unies à d'autres points, au nombre de 60, qui seront *les faux kirkmanns* des 60 hexagones de l'hexangle, et chaque faux kirkmann sera uni à la droite de Cayley-Salmon du semi-système steinérien de l'hexagone correspondant.

La fausse pascale et le faux kirkmann de l'hexagone V^x_{yz} seront respectivement désignés par les expressions k^x_{yz} et K^x_{yz}.

Les propriétés énoncées sont établies par les quatre schémas suivants :

1°	$\dfrac{Q_{zu.vw},\quad Q_{uv.zw},\quad Q_{vz.uw} \\ G_{wzu},\quad G_{wuv},\quad G_{wvz}}{h^w_{zu},\quad h^w_{uv},\quad h^w_{vz}}$ *concourantes en* H^w_{xy}.	$\dfrac{d_{xy.zu.vw},\quad d_{xy.uv.zw},\quad d_{xy.vz.uw} \\ j_{wv},\quad j_{wz},\quad j_{wu}}{B_{xy.zu},\quad B_{xy.uv},\quad B_{xy.vz}}$ *alignés* (sur k^w_{xy}).
2°	$\dfrac{Q_{xz.yw},\quad Q_{xv.yw},\quad Q_{zv.uw} \\ G_{ywz},\quad G_{ywv},\quad G_{vwz}}{h^z_{yw},\quad h^v_{yw},\quad h^w_{zv}}$ *concourantes en* $Q_{yw.zv}$.	$\dfrac{d_{xy.zu.vw},\quad d_{xy.uv.zw},\quad h^x_{yw} \\ j_{vw},\quad j_{zw},\quad j_{yw}}{B_{xy.zu},\quad B_{xy.uv},\quad G_{wxy}}$ *alignés*.

Donc, la fausse pascale k^w_{xy}, droite de jonction des points de Bally

$B_{xy.zu}$ et $B_{xy.uv}$, est unie au point de Steiner G_{wxy}.

3°	h^v_{xy},	h^z_{xy},	h^u_{xy}	$Q_{xy.zu}$,	$Q_{xy.uv}$,	$Q_{xy.vz}$
	g_{wzu},	g_{wuv},	g_{wvz}	J_{wv},	J_{wz},	J_{wu}
	G_{xyv},	G_{xyz},	G_{xyu}	$b_{xy.zu}$,	$b_{xy.uv}$,	$b_{xy.vz}$
	alignés sur j_{xy}.			*concourantes* (en K^w_{xy}).		
4°	h^x_{uv},	h^x_{zu},	h^u_{xy}	$Q_{xy.zu}$,	$Q_{xy.uv}$,	H^x_{yw}
	g_{wyz},	g_{wyv},	g_{wvz}	J_{wv},	J_{wz},	J_{wy}
	G_{xuv},	G_{xuz},	G_{xuy}	$b_{xy.zu}$,	$b_{xy.uv}$,	g_{wxy}
	alignés sur j_{xu}.			*concourantes.*		

Donc, le faux kirkmann K^w_{xy}, intersection des droites de Bally $b_{xy.zu}$ et $b_{xy.uv}$, est uni à la droite de Cayley-Salmon g_{wxy}.

(On peut observer que les conclusions des schémas 2° et 4° entraînent respectivement celles des schémas 1° et 3°.)

De même qu'à chaque point diagonal sont unies quatre pascales, à chaque *point de Bally* $B_{xy.zu}$ sont unies *les quatre fausses pascales* k^v_{xy}, k^w_{xy}, k^v_{zu}, k^w_{zu}, et à chaque *droite de Bally* $b_{xy.zu}$ sont unis *les quatre faux kirkmanns* K^v_{xy}, K^w_{xy}, K^v_{zu}, K^w_{zu}.

Mais les faux kirkmanns et fausses pascales *ne sont pas unis les uns aux autres*, comme le sont les kirkmanns et les pascales; les trois fausses pascales des trois hexagones d'un même sous-système de Kirkmann ne sont d'ailleurs pas concourantes, pas plus que ne sont alignés les faux kirkmanns de trois tels hexagones.

Observation. — Relevons ici une assertion erronée de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (III, 17, Coniques, n° 41, p. 93), assertion qui revient à dire que si un hexagone est *à la fois pascalien et brianchonien* (hexagone dont les deux *trilatères* de côtés alternés, ainsi que les deux *triangles* de sommets alternés, sont homologiques), *les trois opposés* de cet hexagone, mais non ses deux conjugués, *jouissent de la même propriété.*

S'il en était ainsi, non seulement les trois diagonales principales du premier seraient concourantes, mais encore deux quelconques de ses côtés opposés, et la diagonale principale *opposée à cette paire* seraient concourants (car ces trois droites sont les diagonales principales d'un hexagone *opposé au premier*).

Les hexagones à la fois pascaliens et brianchoniens ne jouissent pas en général de cette propriété; seuls la possèdent les hexagones *particuliers* qui sont *projectivement identiques* à l'hexagone *régulier* de la Géométrie élémentaire.

Tel est l'hexagone initial de notre Tableau. On voit immédiatement que les trois opposés d'un tel hexagone sont *non seulement des hexagones de Brianchon*, mais *des hexagones corrélatifs de Pappus*, leurs triples de côtés alternés étant concourants.

CHAPITRE XIV.

ÉLÉMENTS SUPÉRIEURS DE LA CONFIGURATION.

1. Énumération des divers ensembles d'éléments de la configuration. — 2. Procédés de construction des textures successives. — 3. Éléments latéraux. — 4. Série de théorèmes généralisables. — 5. Observations concernant les opérations et notations adoptées; coïncidence de l'ossature des deux textures de second rang absolu avec l'ossature propre aux pascales. — 6. Coïncidence des diverses ossatures, et union aux points et droites de Bally des éléments latéraux et des éléments de Depaz. — 7. Union aux pascales des points de Depaz de premier rang, et rattachement à la configuration pascalienne des éléments jusqu'ici obtenus. — 8. Axes et centres irréguliers. — 9. Points singuliers de Depaz — 10. Axes et centres de mixte conjugaison. — 11. Éléments transversaux. — 12. Textures spéciales fondamentales et ensembles qui s'en déduisent. — 13. Singularités des premières textures spéciales. — 14. Ensembles déduits des droites de Bally. — 15. Observations finales.

1. Nous envisagerons la configuration pascalienne comme : « *Un ensemble d'éléments* (points et droites) *comprenant les* 45 *points diagonaux d'un hexangle pascalien, et construit, à partir de ces* 45 *points diagonaux, par adjonctions successives d'éléments, de telle sorte que tout élément adjoint à l'ensemble soit un élément de jonction ou d'intersection de trois éléments appartenant déjà à l'ensemble* (points diagonaux, ou éléments provenant d'adjonctions précédentes), *et que tout élément de jonction ou d'intersection de trois éléments de l'ensemble appartienne aussi à l'ensemble.* »

Cette configuration comprend donc, à première vue, outre les 45 points diagonaux : les côtés et sommets de l'hexangle, les pascales et les kirkmanns, les divers éléments de l'ossature totale.

Nous verrons qu'elle comprend également les points et droites de Bally, donc aussi les fausses pascales et les faux kirkmanns.

Elle contiendra en outre :

1° Divers ensembles ponctuels ou réglés que nous appellerons *les*

textures de la configuration. Ces ensembles seront formés chacun de 60 éléments (points ou droites) correspondant biunivoquement aux 60 hexagones de l'hexangle, offrant une remarquable analogie avec les pascales et les kirkmanns, *et comme eux*, *trois à trois unis aux éléments de l'ossature*.

2° Divers ensembles ponctuels ou réglés que nous appellerons « ensembles *d'éléments latéraux* ». Ces ensembles seront formés chacun de 90 éléments correspondant biunivoquement aux 90 *doublets d'isodiagonaux* et offrant une remarquable analogie avec les *points diagonaux*; car, *tout comme le sont ces derniers pour les pascales*, ce seront les éléments de jonction où d'intersection *de paires d'éléments d'une même texture relatifs à deux hexagones isodiagonaux*.

Qualifiant d'*inverses l'un de l'autre* deux éléments latéraux *d'un même ensemble* relatifs à deux doublets dits *inverses* d'isodiagonaux (qui se déduisent chacun de l'autre, tels W_{zu}^{xy} et W_{xy}^{zu}, par permutation simultanée des indices supérieurs avec les inférieurs), les éléments latéraux de chaque ensemble (ponctuel ou réglé) ont la remarquable propriété d'être unis *par paires d'éléments inverses* soit aux droites, soit aux points de Bally. Les latérales *du premier ensemble* offriront *en outre* la particularité d'être unies par paires (de non inverses) aux *points diagonaux*.

3° Divers ensembles ponctuels ou réglés comprenant chacun 180 éléments que nous dénommons *éléments* (points ou droites) *de Depaz* (¹).

Les éléments de Depaz sont *les éléments d'intersection ou de jonction de deux éléments latéraux d'un même ensemble relatifs à deux doublets contigus d'isodiagonaux* (doublets qui se déduisent chacun de l'autre, ainsi qu'il a été dit au Chapitre XII, n° 10, par permutation *d'un seul* indice supérieur avec *un seul* indice inférieur, tels W_{zu}^{xy} et W_{zy}^{xu}).

Les 180 éléments de Depaz de chaque ensemble seront unis quatre par quatre soit aux 45 points, soit aux 45 droites de Bally.

Les *points* de Depaz *du premier ensemble* offriront *en outre* la remarquable particularité *d'être trois par trois unis aux pascales*.

4° Divers ensembles ponctuels ou réglés, comprenant chacun 180

(¹) Hommage à M. Victor Depaz.

éléments (points ou droites) que nous dénommons *centres ou axes irréguliers*, chaque élément étant un élément principal d'homologie (centre ou axe) de deux triangles d'éléments *d'une même texture* (1°) relatifs aux hexagones *de deux triplets d'isodiagonaux irrégulièrement homologues* (Chap. XII, n° 10).

Chacun des 180 éléments irréguliers d'un même ensemble sera uni : à l'un des 60 éléments d'une même texture, commun à trois de ces éléments irréguliers; à l'un des 90 éléments latéraux d'un même ensemble, commun à deux de ces éléments irréguliers; à deux des 180 éléments ordinaires de Depaz (3°) d'un même ensemble, chacun de ces deux éléments de Depaz étant commun à deux éléments irréguliers; à deux des 180 éléments *singuliers* (5°) de Depaz d'un même ensemble, chacun commun à deux éléments irréguliers; à deux des 120 éléments *de mixte conjugaison* d'un même ensemble (6°), chacun commun à trois éléments irréguliers; à un élément *transversal* (7°); à l'un des 60 éléments d'une même *texture spéciale fondamentale* (8°), chacun commun à trois éléments irréguliers.

5° Divers ensembles ponctuels ou réglés comprenant chacun 180 éléments que nous dénommons *éléments singuliers de Depaz*, et qui, comme les éléments ordinaires de même nom, sont communs à deux éléments irréguliers d'un même ensemble et sont unis, par quadruplets d'un même ensemble, aux éléments de Bally.

6° Divers ensembles ponctuels ou réglés comprenant chacun 120 éléments (points ou droites), que nous dénommons *centres* ou *axes de mixte conjugaison*, chaque élément étant un élément principal d'homologie (centre ou axe) de deux triangles d'éléments *d'une même texture* relatifs aux hexagones *de deux triplets conjugalement homologues et formés l'un d'isodiagonaux, l'autre d'associés*.

Les éléments de mixte conjugaison d'un même ensemble sont, comme on l'a dit, unis *par paires* aux éléments irréguliers d'un même ensemble, lesquels sont inversement unis *par triplets* aux premiers.

Ces éléments de mixte conjugaison d'un même ensemble seront aussi unis six par six aux éléments de l'ossature ponctuelle ou réglée (suivant que l'ensemble envisagé est réglé ou ponctuel).

7° Divers ensembles ponctuels ou réglés comprenant chacun 180 éléments que nous dénommons *éléments transversaux* (points ou droites) de la configuration. Chaque élément transversal est uni à

un élément de texture, à un élément irrégulier et à deux éléments de mixte conjugaison.

8° Divers ensembles ponctuels ou réglés, déduits chacun d'un ensemble d'éléments irréguliers, et comprenant chacun 60 éléments correspondant biunivoquement aux 60 hexagones de l'hexangle; ces ensembles s'appelleront *les textures spéciales fondamentales* de la configuration. Les 60 éléments de chaque texture spéciale fondamentale seront trois par trois unis aux 20 éléments d'ossature de Steiner ou de Cayley-Salmon.

9° De même que la texture fondamentale des pascales, chaque texture spéciale fondamentale engendrera de *nouveaux* ensembles analogues aux précédents; les *nouveaux* ensembles d'éléments irréguliers déduits de cette texture spéciale fondamentale engendreront de *nouvelles* textures spéciales fondamentales, desquelles on déduira de *nouveaux* ensembles analogues aux précédents, etc.

10° De l'ensemble des 45 droites de Bally, nous déduirons un ensemble de 60 points, jouissant de propriétés corrélatives de celles de la texture des pascales; ce sera *la texture corrélative fondamentale* de la configuration. De même que la texture fondamentale des pascales, cette texture corrélative engendrera toute une série d'ensembles analogues aux précédents.

2. *L'ensemble des* 60 *pascales* de l'hexangle pascalien s'appellera la *texture fondamentale*, ou *texture de rang fondamental*, de la configuration pascalienne.

Le *rang* de cette texture sera représenté par le symbole o (zéro) placé *en indice inférieur et à gauche* de la lettre h, laquelle sera *le symbole spécifique d'une droite de texture*. La pascale de l'hexagone V^x_{yz} sera donc désormais désignée par l'expression ${}_0h^x_{yz}$.

L'ensemble des 60 *kirkmanns* sera *la texture de premier rang supérieur* de la configuration. Son rang sera représenté par le symbole-unité 1, placé *en indice inférieur et à gauche* de la lettre H, qui sera *le symbole spécifique d'un point de texture*. Le kirkmann de l'hexagone V^x_{yz} sera donc désigné par l'expression ${}_1H^x_{yz}$.

La texture ${}_0h$ des pascales peut s'obtenir à partir de la texture ${}_1H$ des kirkmanns, si l'on considère chaque pascale (Chap. XIII, 4, théorème XII), telle ${}_0h^x_{yz}$, comme *l'axe d'homologie des triangles de kirkmanns* ${}_1H^y_{z(x)}$ et ${}_1H^z_{y(x)}$ des deux triplets *d'associés conjuga-*

lement homologues $W^{y}_{z(x)}$ et $W^{z}_{y(x)}$ (triangles homologiques par le centre de Salmon J_{yz}, les droites de jonction de leurs sommets homologues étant trois droites de Cayley-Salmon unies à ce centre).

Désignons par (P) ce procédé qui, opérant sur la texture des kirkmanns, conduit à la texture des pascales.

La texture des kirkmanns s'obtient inversement à partir de celle des pascales, en considérant chaque kirkmann (Chap. XIII, 4, théorème X), tel ${}_1H^{x}_{yz}$, comme *le centre d'homologie des triangles de pascales* ${}_0h^{(z)}_{xy}$ et ${}_0h^{(y)}_{xz}$ *des deux triplets d'isodiagonaux associativement homologues* $W^{(z)}_{xy}$ et $W^{(y)}_{xz}$ (triangles homologiques par la droite de Cayley-Salmon g_{uvw}, les points de concours de leurs côtés homologues étant les trois kirkmanns unis à cette droite).

Désignons par (P′) ce procédé qui, opérant sur la texture des pascales, conduit à celle des kirkmanns.

Dans le *couple de textures* des pascales et des kirkmanns, celle des pascales (rang fondamental) étant considérée comme *l'antécédente*, et celle des kirkmanns (premier rang supérieur) comme *la consécutive*, nous pouvons dire que le procédé (P) fait passer *d'une texture à la texture antécédente*, et le procédé (P′), *d'une texture à la texture consécutive.*

La texture des pascales peut être aussi soumise au procédé (P), puisque les deux triangles de pascales ${}_0h^{y}_{z(x)}$ et ${}_0h^{z}_{y(x)}$ des deux triplets *d'associés conjugalement homologues* $W^{y}_{z(x)}$ et $W^{z}_{y(x)}$ sont *homologiques* (par l'axe de Steiner-Plücker j_{yz}, Chap. XIII, 2, théorème IV).

Les centres de ces diverses homologies, relatives aux 60 *paires de triplets d'associés conjugalement homologues, seront univoquement rattachés aux* 60 *hexagones* correspondants *respectifs de ces paires de triplets, et constitueront la texture* (ponctuelle) *antécédente* (dans l'échelle des textures à construire) *de celle des pascales.*

On attribuera donc à cette nouvelle texture *le premier rang inférieur*, rang représenté par le symbole *surligné* $\bar{1}$ (*unité surlignée*, assimilable à l'unité négative), et l'un de ses éléments, par exemple, celui qui est relatif à l'hexagone V^{x}_{yz} (centre d'homologie des triangles de pascales des triplets de la précédente paire, dont cet hexagone est le correspondant), sera désigné par l'expression ${}_{\bar{1}}H^{x}_{yz}$, l'indice *sur-*

ligné de gauche $(\bar{1})$ représentant *le rang* (premier inférieur) *de la texture correspondante.*

De même, la texture des kirkmanns peut être soumise au procédé (P′), les deux triangles de kirkmanns ${}_1H^{(y)}_{xz}$ et ${}_1H^{(z)}_{xy}$ des deux triplets *d'isodiagonaux associativement homologues* $W^{(y)}_{xz}$ et $W^{(z)}_{xy}$ étant *homologiques* (par le point de Steiner G_{uvw}, comme il résultera du schéma du théorème XVI, 4).

Les axes de telles homologies, relatives aux 60 *paires de triplets d'isodiagonaux associativement homologues, seront univoquement rattachés aux* 60 *hexagones correspondants respectifs de ces paires de triplets, et constitueront la texture* (réglée) *consécutive* (dans l'échelle des textures à construire) *de celle des kirkmanns.*

On attribuera donc à cette nouvelle texture réglée *le second rang supérieur, représenté par l'indice numérique* 2, et l'un de ces éléments, par exemple, celui qui est relatif à l'hexagone V^{x}_{yz} (axe d'homologie des triangles de kirkmanns des triplets de la précédente paire, dont cet hexagone est le correspondant), sera désigné par l'expression ${}_2h^{x}_{yz}$.

Le procédé (P) sera encore applicable à la nouvelle texture ${}_{\bar{1}}H$, et le procédé (P′) applicable à la nouvelle texture ${}_2h$ (comme il résultera des propriétés qui vont être établies pour ces textures), et il en sera de même pour les nouvelles textures déduites de ces dernières par les mêmes procédés, etc.

On obtiendra de la sorte *l'échelle des textures* (inférieures, fondamentale et supérieures) *de la configuration pascalienne :*

$$\ldots,\quad {}_{\overline{2n}}h,\quad {}_{\overline{2n-1}}H,\quad \ldots,\quad {}_{\bar{2}}h,\quad {}_{\bar{1}}H,\quad {}_0h,\quad {}_1H,\quad {}_2h,\quad \ldots,\quad {}_{2n-1}H,\quad {}_{2n}h,\quad \ldots,$$

alternativement réglées et ponctuelles, les textures de rang pair (inférieur, fondamental, ou supérieur) *étant formées de droites, et celles de rang impair, de points.*

Cette échelle des textures étant supposée ordonnée de gauche à droite, le procédé (P), appliqué à une texture inférieure, donne, *par construction même*, la texture antécédente, et le procédé (P′), appliqué à une texture supérieure, donne la texture consécutive.

Cette propriété subsistera, quelle que soit la classe inférieure ou supérieure de la texture envisagée : appliqué à une texture quelconque, inférieure ou supérieure, le procédé (P) donne *toujours* la

texture antécédente, et le procédé (P′), *toujours* la texture consécutive de l'échelle.

Ces deux procédés sont donc, en quelque sorte, inverses l'un de l'autre.

3. Les deux triangles *de pascales* ${}_0h^y_{z(x)}$ et ${}_0h^z_{y(x)}$, des deux triplets d'associés conjugalement homologues $W^y_{z(x)}$ et $W^z_{y(x)}$, qui définissent (comme centre de leur homologie) le point de texture de premier rang inférieur ${}_{\bar{1}}H^x_{yz}$, *ne sont autres*, comme on sait (et comme il résulte de leur schéma), que les triangles *de kirkmanns* ${}_1H^y_{x(z)}$ et ${}_1H^z_{x(y)}$ des deux triplets d'associés *diagonalement homologues* $W^y_{x(z)}$ et $W^z_{x(y)}$.

Les droites de jonction des paires de sommets homologues de ces deux triangles, concourantes au point de première texture inférieure envisagé, sont donc les droites de jonction des trois paires de kirkmanns des trois doublets d'isodiagonaux : W^{yz}_{xu}, W^{yz}_{xv}, W^{yz}_{xw}.

Désignons par ${}_1q^{yz}_{xu}$ la droite de jonction des kirkmanns des deux *isodiagonaux* V^y_{xu} et V^z_{xu}, droite qui sera dénommée : *latérale de premier rang supérieur, relative au doublet d'isodiagonaux* W^{yz}_{xu}.

Les trois latérales : ${}_1q^{yz}_{xu}$, ${}_1q^{yz}_{xv}$, ${}_1q^{yz}_{xw}$, *sont concourantes*, au point de premier rang inférieur ${}_{\bar{1}}H^x_{yz}$, centre d'homologie des deux triangles ${}_0h^y_{z(x)}$ et ${}_0h^z_{y(x)}$, ou ${}_1H^y_{x(z)}$ et ${}_1H^z_{x(y)}$, comme l'indique le schéma :

${}_0h^y_z(x)$	${}_0h^y_{zu}$, ${}_0h^y_{zv}$, ${}_0h^y_{zw}$	${}_1H^y_{xu}$, ${}_1H^y_{xv}$, ${}_1H^y_{xw}$	${}_1H^y_x(z)$
${}_0h^z_y(x)$	${}_0h^z_{yu}$, ${}_0h^z_{yv}$, ${}_0h^z_{yw}$	${}_1H^z_{xu}$, ${}_1H^z_{xv}$, ${}_1H^z_{xw}$	${}_1H^z_x(y)$
	G_{yzu}, G_{yzv}, G_{yzw}	${}_1q^{yz}_{xu}$, ${}_1q^{yz}_{xv}$, ${}_1q^{yz}_{xw}$	
	alignés sur j_{yz}.	*concourantes* (en ${}_{\bar{1}}H^x_{yz}$).	

Chacune de ces trois latérales, unies au point inférieur ${}_{\bar{1}}H^x_{yz}$, est évidemment aussi unie à un autre point inférieur : telle, par exemple, la première ${}_1q^{yz}_{xu}$ est aussi unie au point inférieur ${}_{\bar{1}}H^u_{yz}$.

Si nous appelons *latérale de premier rang inférieur relative au doublet d'isodiagonaux* W^{xu}_{yz}, et désignons par ${}_{\bar{1}}q^{xu}_{yz}$, la droite de jonction des deux points de premier rang inférieur ${}_{\bar{1}}H^x_{yz}$ et ${}_{\bar{1}}H^u_{yz}$, il résulte de ce qu'on vient de dire que *les deux droites* ${}_1q^{yz}_{xu}$ et ${}_{\bar{1}}q^{xu}_{yz}$ *coïncident*.

Cette remarque nous permettra de n'envisager de préférence que des latérales supérieures, et d'exclure, pour ces éléments, les notations numériques *surlignées*.

A chaque point de premier rang inférieur, tel ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{yz}$, sont unies, comme on l'a vu, *trois premières latérales* : ${}_{1}q^{yz}_{xu}$, ${}_{1}q^{yz}_{xv}$, ${}_{1}q^{yz}_{xw}$; à chaque point de premier rang supérieur (kirkmann), tel ${}_{1}\mathrm{H}^{x}_{yz}$, sont aussi unies trois premières latérales : ${}_{1}q^{xu}_{yz}$, ${}_{1}q^{xv}_{yz}$, ${}_{1}q^{xw}_{yz}$. A chaque première latérale, telle ${}_{1}q^{yz}_{xu}$, sont simultanément unis les deux points de premier rang supérieur (kirkmanns) : ${}_{1}\mathrm{H}^{y}_{xu}$ et ${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{xu}$, et les deux points de premier rang inférieur : ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{yz}$ et ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{u}_{yz}$.

Une propriété *particulière à la texture de premier rang inférieur* consiste en ce que le point ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{yz}$ de cette texture peut être aussi défini *comme centre d'homologie du trilatère* T_{yz}, *avec l'un ou l'autre des deux triangles précédents* ${}_{0}h^{y}_{z(x)}$ *ou* ${}_{0}h^{z}_{y(x)}$, *c'est-à-dire*, ${}_{1}\mathrm{H}^{y}_{x(z)}$, *ou* ${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{x(y)}$, puisque ces trois trilatères forment un triplet steinérien (Chap. XIII, 2, théorème IV), et sont deux à deux homologiques *par le même centre*.

Si l'on considère les deux quadrilatères de pascales : ${}_{0}h^{y}_{z}$ et ${}_{0}h^{z}_{y}$, des deux quadruplets d'associés conjugalement homologues W^{y}_{z} et W^{z}_{y}, les quatre points de premier rang inférieur

$${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{yz},\ {}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{u}_{yz},\ {}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{v}_{yz},\ {}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{w}_{yz},$$

correspondant aux quatre paires de triangles homologues de ces quadrilatères, sont chacun le point de concours de trois des six latérales :

$${}_{1}q^{yz}_{xu},\quad {}_{1}q^{yz}_{xv},\quad {}_{1}q^{yz}_{xw},\quad {}_{1}q^{yz}_{uv},\quad {}_{1}q^{yz}_{uw},\quad {}_{1}q^{yz}_{vw},$$

droites de jonction des six paires de sommets homologues (kirkmanns) de ces quadrilatères.

Ces quatre points forment *le quadrangle* ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}_{yz}$ *d'éléments de texture de premier rang inférieur des hexagones du quadruplet d'isodiagonaux* W_{yz} ; ce quadrangle a pour *côtés* les six latérales précédentes.

C'est le *quadrangle de raccordement* des précédents quadrilatères de pascales, *polairement circonscrit* à chacun d'eux.

Trois côtés (premières latérales) *concourants quelconques de ce quadrangle sont circonscrits au trilatère* T_{yz} (simultanément homologique à deux triangles homologues quelconques des quadrilatères), et *ce trilatère* T_{yz} *est donc le triangle conjugué de ce quadrangle* ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}_{yz}$.

Chaque première latérale, telle ${}_1q^{yz}_{xu}$, *est ainsi unie à un point diagonal* (sommet $Q_{xu.vw}$ du trilatère T_{yz}), et *à chaque point diagonal* tel $Q_{xu.vw}$, *sont unies deux premières latérales* (${}_1q^{yz}_{xu}$ et ${}_1q^{yz}_{vw}$), *harmoniques au couple de côtés de l'hexangle unis à ce point diagonal.*

Les premières latérales *au nombre de* 90, qui sont, comme on vient de voir, les côtés des 15 quadrangles de points de première texture inférieure des hexagones des 15 quadruplets d'isodiagonaux, sont aussi (par définition) les côtés des 15 quadrangles *de kirkmanns* des hexagones des 15 quadruplets d'isodiagonaux. Le *quadrilatère de pascales* de l'un de ces quadruplets d'isodiagonaux a pour sommets, comme on sait, *des points diagonaux*, lesquels *sont précisément ceux qui sont unis aux latérales, côtés du quadrangle de kirkmanns du même quadruplet*, de sorte que *le quadrangle de kirkmanns des hexagones d'un quadruplet d'isodiagonaux est polairement circonscrit au quadrilatère de pascales de ces mêmes hexagones.*

Autrement dit, et pareillement au cas du quadruplet d'associés :

Les kirkmanns et les pascales des hexagones d'un quadruplet d'isodiagonaux sont des éléments réciproques d'une même figure polaire.

(Dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, III, 17, n° 39, p. 89, et n° 40, p. 91, *Coniques*, les premières latérales sont appelées *les droites v*, et les éléments des textures supérieures ou inférieures autres que pascales et kirkmanns : *les points Z et les droites z*. Ces divers éléments y sont implicitement attribués à *Véronèse*, les travaux du géomètre italien étant cités à leur sujet.)

Les *points diagonaux* de l'hexangle peuvent être considérés comme *les éléments latéraux de rang fondamental*, qui coïncideraient deux à deux par paires d'éléments *inverses*. Le point diagonal $Q_{xy.zu}$ est en effet le point de concours soit des deux pascales ${}_0h^{x}_{zu}$ et ${}_0h^{y}_{zu}$ du doublet d'isodiagonaux W^{xy}_{zu}, soit des deux pascales ${}_0h^{z}_{xy}$ et ${}_0h^{u}_{xy}$ du doublet d'isodiagonaux W^{zu}_{xy}. Il sera donc *dorénavant* désigné par l'une ou par l'autre des expressions : ${}_0Q^{xy}_{zu}$ ou ${}_0Q^{zu}_{xy}$, suivant qu'on le rattache à l'une ou à l'autre de ces deux paires de pascales.

Nous appellerons *paire de textures unies* l'ensemble de deux textures d'espèces différentes (l'une ponctuelle et l'autre réglée),

telles que tout élément de l'une et tout élément de l'autre, *respectivement relatifs à deux hexagones séparés, soient toujours unis* (exemple : l'ensemble des deux textures des pascales et des kirkmanns).

Nous appellerons « paire de textures *latéralement reliées* », l'ensemble de deux textures de même espèce telles que deux éléments de l'une, relatifs aux deux hexagones d'un doublet d'isodiagonaux *soient toujours alignés* (ou concourants) *avec les deux éléments de l'autre relatifs aux deux hexagones du doublet d'isodiagonaux inverse du premier* (exemple : l'ensemble des textures des kirkmanns et des points de premier rang inférieur).

La texture fondamentale des pascales présente, parmi les diverses textures de la configuration pascalienne, ce caractère spécial *d'être latéralement reliée à elle-même*, les quatre pascales des hexagones des deux doublets inverses d'isodiagonaux W_{xu}^{yz} et W_{yz}^{xu} étant *concourantes* (au point diagonal $Q_{yz.xu}$).

Pour la concordance des notations, et en vue d'une généralisation uniforme de la série des théorèmes du n° 4 suivant, nous conviendrons qu'il est loisible de considérer indifféremment comme *supérieur* ou comme *inférieur* le rang *fondamental* de la texture des pascales, ce qui conduira dans certains cas *à surligner l'indice numérique des pascales*, qui sera alors $\overline{0}$ (notamment quand une pascale est définie comme droite de jonction de deux points de premier rang supérieur donnés (exemple, théorème XVI).

Les propriétés précédemment énoncées pour les premières latérales, sauf celles qui résultent de leur caractère particulier *d'être unies aux éléments latéraux de rang précédent ou points diagonaux* (par paires de latérales harmoniques au couple de côtés de l'hexangle unis à leur point de concours), *s'étendent aux éléments latéraux de rangs plus élevés.*

(C'est en mémoire de la propriété des *latérales* d'être les *côtés* de quadrangles d'éléments d'une même texture relatifs aux quadruplets d'isodiagonaux, que nous qualifions de *latéraux* les éléments en question.)

Ainsi, le latéral de rang $2n$, relatif au doublet d'isodiagonaux W_{xu}^{yz} et désigné par ${}_{2n}Q_{xu}^{yz}$, qui est *par définition* le point de concours des deux droites de $2n^{ième}$ texture supérieure ${}_{2n}h_{xu}^{y}$ et ${}_{2n}h_{xu}^{z}$, sera

aussi uni aux deux droites de $2n^{ième}$ texture *inférieure* : $_{\overline{2n}}h^x_{yz}$ et $_{\overline{2n}}h^u_{yz}$.

4. En vue d'établir la construction des diverses textures et ensembles d'éléments latéraux et d'éléments de Depaz, nous allons donner, concernant les deux nouvelles textures $_{\overline{1}}\mathrm{H}$ et $_2h$ inférieure et supérieure déduites des pascales et des kirkmanns, une série de six théorèmes, *à énoncés et démonstrations généralisables par une méthode uniforme* consistant dans *la textuelle répétition des énoncés et démonstrations de la série*, *sauf*, à chaque nouvelle répétition, *changement réciproque les unes dans les autres de majuscules et de minuscules, et augmentation d'une unité de la valeur absolue de tous les indices numériques.*

Par la généralisation de ces théorèmes, chaque texture ponctuelle sera pourvue d'une ossature réglée (analogue à celle des droites de Cayley-Salmon), et chaque texture réglée, d'une ossature ponctuelle (analogue à celle des points de Steiner). Deux textures *latéralement reliées* auront *même rang absolu* (supérieur pour l'une et inférieur pour l'autre) et *même ossature;* les ossatures de deux textures *consécutives quelconques de l'échelle*, de même que celles de deux textures *unies* seront toujours *complémentaires* (comme le sont l'une de l'autre les deux configurations de Steiner et de Cayley-Salmon). Chaque texture de rang inférieur arbitraire $\overline{k}$, et la texture de rang supérieur $k+1$, seront *intimement unies*, comme le sont les textures primitives des pascales et des kirkmanns, leur ensemble se divisant pareillement en *six figures polaires*, correspondant aux six systèmes de Kirkmann.

Jusqu'à ce que soit définitivement établie la coïncidence des diverses ossatures réglées ainsi que celle des diverses ossatures ponctuelles (5), nous ferons désormais précéder de l'indice o tout élément G ou j de l'ossature des pascales, et de l'indice 1, tout élément g ou J, de l'ossature des kirkmanns.

Théorème XVI. — *Les deux triangles d'éléments supérieurs de premier rang* (kirkmanns) *des hexagones d'une paire de triplets d'isodiagonaux* associativement *homologues sont* homologiques; *l'axe de cette homologie*, *qui est* par définition *l'élément* (droite) *de second rang supérieur de l'hexagone* correspondant *de la paire*

de triplets, est uni aux trois éléments (points) *de premier rang inférieur des trois hexagones du sous-système de Kirkmann* séparé *de cet hexagone correspondant.*

Soient $W_{xz}^{(y)}$ et $W_{xy}^{(z)}$ les deux triplets mentionnés :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
{}_1H_{xz}^{(y)} & {}_1H_{xz}^{u}, & {}_1H_{xz}^{v}, & {}_1H_{xz}^{w} & {}_1q_{xz}^{vw}, & {}_1q_{xz}^{wu}, & {}_1q_{xz}^{uv} \\
{}_1H_{xy}^{(z)} & {}_1H_{xy}^{u}, & {}_1H_{xy}^{v}, & {}_1H_{xy}^{w} & {}_1q_{xy}^{vw}, & {}_1q_{xy}^{wu}, & {}_1q_{xy}^{uv} \\
\cline{2-4}\cline{5-7}
 & {}_{\bar{0}}h_{vw}^{u}, & {}_{\bar{0}}h_{wu}^{v}, & {}_{\bar{0}}h_{uv}^{w} & {}_{\bar{1}}H_{vw}^{x}, & {}_{\bar{1}}H_{wu}^{x}, & {}_{\bar{1}}H_{uv}^{x} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\textit{concourantes en } {}_0G_{uvw}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{alignés sur l'axe } {}_2h_{yz}^{x}.}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

(En vue des généralisations, les pascales du schéma sont considérées comme éléments *inférieurs*, et leurs indices *numériques*, surlignés).

Corollaire I. — *Un point de première texture inférieure et une droite de seconde texture supérieure, respectivement relatifs à deux hexagones* séparés, *sont toujours unis* (comme le sont la pascale et le kirkmann de deux tels hexagones).

Corollaire II. — *A chaque point de première texture inférieure* (${}_{\bar{1}}H_{yz}^{x}$) *sont donc inversement unies trois droites de seconde texture supérieure* (${}_2h_{vw}^{x}$, ${}_2h_{wu}^{x}$, ${}_2h_{uv}^{x}$), *qui sont celles des trois hexagones séparés de celui auquel appartient le point.*

Corollaire III. — *Les dix points* ${}_{\bar{1}}H$ *et les dix droites* ${}_2h$ *des hexagones d'un même système* (x) *de Kirkmann forment une figure polaire* (x_2), *et l'ensemble des deux textures* ${}_{\bar{1}}H$ *et* ${}_2h$ *se divise, comme l'ensemble des pascales et des kirkmanns, en six figures polaires :*

$$x_2,\quad y_2,\quad z_2,\quad u_2,\quad v_2,\quad w_2.$$

Théorème XVII. — *La texture de premier rang inférieur a même ossature que la texture de premier rang supérieur* (texture des kirkmanns).

Le point ${}_{\bar{1}}H_{yz}^{x}$, étant le point de concours des trois premières latérales : ${}_1q_{xu}^{yz}$, ${}_1q_{xv}^{yz}$, ${}_1q_{xw}^{yz}$, nous devons montrer que les deux premières, par exemple, concourent avec la droite d'ossature ${}_1g_{xyz}$.

On considérera les deux triangles *de pascales* (envisagées comme éléments inférieurs) des deux triplets *d'associés irrégulièrement homologues* $W^{y}_{w(x)}$ et $W^{z}_{w(x)}$:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
{}_{\bar 0}h^{y}_{w(x)} & {}_{\bar 0}h^{y}_{wu}, & {}_{\bar 0}h^{y}_{wv}, & {}_{\bar 0}h^{y}_{wz} & {}_{1}H^{y}_{xu}, & {}_{1}H^{y}_{xv}, & {}_{1}H^{y}_{xz} \\
{}_{\bar 0}h^{z}_{w(x)} & {}_{\bar 0}h^{z}_{wu}, & {}_{\bar 0}h^{z}_{wv}, & {}_{\bar 0}h^{z}_{wy} & {}_{1}H^{z}_{xu}, & {}_{1}H^{z}_{xv}, & {}_{1}H^{z}_{xy} \\
\cline{2-7}
 & {}_{0}Q^{wu}_{yz}, & {}_{0}Q^{wv}_{yz}, & {}_{0}G_{wyz} & {}_{1}q^{yz}_{xu}, & {}_{1}q^{yz}_{xv}, & {}_{1}g_{xyz} \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } {}_{0}h^{w}_{yz}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes} \text{ (en } {}_{\bar 1}H^{x}_{yz})}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Autre démonstration :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
{}_{1}g_{xyu}, & {}_{1}g_{xyv}, & {}_{\bar 0}h^{y}_{wz} & {}_{1}H^{y}_{vx}, & {}_{1}H^{y}_{xu}, & {}_{1}J_{xy} \\
{}_{1}g_{xzu}, & {}_{1}g_{xzv}, & {}_{\bar 0}h^{z}_{wy} & {}_{1}H^{z}_{xv}, & {}_{1}H^{z}_{xu}, & {}_{1}J_{xz} \\
\hline
{}_{1}J_{xu}, & {}_{1}J_{xv}, & {}_{0}G_{wyz} & {}_{1}q^{yz}_{xv}, & {}_{1}q^{yz}_{xu}, & {}_{1}g_{xyz} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } {}_{1}g_{xuv}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes.}}
\end{array}$$

Théorème XVIII. — *Les trois droites de second rang supérieur des trois hexagones d'un même semi-système de Steiner sont concourantes.*

Considérons les trois triangles d'éléments de premier rang supérieur (kirkmanns) : ${}_{1}H^{(x)}_{yz}$, ${}_{1}H^{(y)}_{zx}$, ${}_{1}H^{(z)}_{xy}$, des trois triplets *d'isodiagonaux deux à deux associativement homologues* : $W^{(x)}_{yz}$, $W^{(y)}_{zx}$, $W^{(z)}_{xy}$.

Leurs trois triples de sommets deux à deux homologues (tel le triple : ${}_{1}H^{u}_{yz}$, ${}_{1}H^{u}_{zx}$, ${}_{1}H^{u}_{xy}$) sont respectivement alignés sur les trois pascales : ${}_{\bar 0}h^{u}_{vw}$, ${}_{\bar 0}h^{v}_{wu}$, ${}_{\bar 0}h^{w}_{uv}$, *toutes unies au point d'ossature* ${}_{0}G_{uvw}$.

Les trois triangles étant donc deux à deux homologiques *par le même centre*, leurs trois axes d'homologie deux à deux, qui sont *par définition* les trois droites ${}_{2}h^{x}_{yz}$, ${}_{2}h^{y}_{zx}$, ${}_{2}h^{z}_{xy}$, *sont concourantes.*

C. Q. F. D.

Les éléments de l'ossature ponctuelle de la texture fondamentale étant spécifiquement désignés par la notation ${}_{0}G$, et ceux de l'ossature réglée *commune* (théorème XVII) *aux deux textures latéralement reliées des premiers rangs supérieur et inférieur*, par la notation ${}_{1}g$, désignons *provisoirement* par ${}_{2}G_{xyz}$ le point de concours des trois droites de second rang supérieur : ${}_{2}h^{x}_{yz}$, ${}_{2}h^{y}_{zx}$, ${}_{2}h^{z}_{xy}$.

Théorème XIX. — *Les vingt points* ${}_{2}G$ *forment aussi une configuration* G(3, 6), *analogue à la configuration d'ossature fonda-*

mentale et qui sera l'ossature de la texture du second rang supérieur ${}_2h$.

${}_{\bar 1}H^x_{zu}$,	${}_{\bar 1}H^x_{zv}$,	${}_{\bar 1}H^x_{zw}$	${}_2h^x_{yu}$,	${}_2h^x_{yv}$,	${}_2h^x_{yw}$	${}_2h^x_{y(z)}$
${}_{\bar 1}H^y_{zu}$,	${}_{\bar 1}H^y_{zv}$,	${}_{\bar 1}H^y_{zw}$	${}_2h^y_{xu}$,	${}_2h^y_{xv}$,	${}_2h^y_{xw}$	${}_2h^y_{x(z)}$
${}_1q^{zu}_{xy}$,	${}_1q^{zv}_{xy}$,	${}_1q^{zw}_{xy}$	${}_2G_{xyu}$,	${}_2G_{xyv}$,	${}_2G_{xyw}$	
concourantes en ${}_1H^z_{xy}$.			*alignés.*			

La droite d'alignement des trois points ${}_2G_{xyu}$, ${}_2G_{xyv}$, ${}_2G_{xyw}$, qui porte évidemment le quatrième point ${}_2G_{xyz}$ sera désignée par : ${}_2j_{xy}$. Au point ${}_2G_{xyz}$ sont inversement unis les trois *axes* de deuxième ossature.

$${}_2j_{xy},\quad {}_2j_{yz},\quad {}_2j_{zx},$$

C. Q. F. D.

Désignons par ${}_1D^{u/z}_{xy}$ (*point de Depaz de premier rang*) le point de concours des deux premières latérales *contiguës :* ${}_1q^{xu}_{yz}$ et q^{yu}_{xz} (qui se déduisent chacune de l'autre par simple transposition d'un seul indice supérieur avec un seul indice inférieur).

Théorème XX. — *Les deux points de Depaz* ${}_1D^{z/u}_{xy}$ *et* ${}_1D^{z/v}_{xy}$, le *kirkmann* ${}_1H^z_{uv}$ *et le latéral fondamental* (point diagonal) ${}_0Q^{zw}_{xy}$ *sont alignés.*

${}_1H^y_{xu}$,	${}_1H^z_{xu}$,	${}_0G_{zwy}$	${}_{\bar 0}h^z_{yw}$,	${}_{\bar 0}h^y_{zw}$,	${}_1q^{yz}_{xu}$
${}_1H^x_{yu}$,	${}_1H^z_{yu}$,	${}_0G_{zwx}$	${}_{\bar 0}h^z_{xw}$,	${}_{\bar 0}h^x_{zw}$,	${}_1q^{xz}_{yu}$
${}_1g_{xyu}$,	${}_{\bar 0}h^z_{vw}$,	${}_0j_{zw}$	${}_1H^z_{uv}$,	${}_0Q^{zw}_{xy}$,	${}_1D^{z/u}_{xy}$
concourantes en ${}_0G_{zvw}$.			*alignés.*		

C. Q. F. D.

Théorème XXI. — *De même que l'ossature* ${}_0G$ *de la texture fondamentale, l'ossature* ${}_2G$ *de la texture* ${}_2h$ *de second rang supérieur est* complémentaire *de l'ossature de rang précédent* ${}_1g$, *commune aux deux textures de premiers rangs supérieur et inférieur.*

Considérons les deux triangles d'éléments de premier rang inférieur relatifs aux deux triplets d'*isodiagonaux irrégulièrement homologues* $W^{(w)}_{yz}$ et $W^{(w)}_{zx}$:

${}_1q^{yz}_{uv}$;	${}_1q^{yz}_{vx}$,	${}_1q^{yz}_{xu}$	${}_{\bar 1}H^x_{yz}$,	${}_{\bar 1}H^u_{yz}$,	${}_{\bar 1}H^v_{yz}$	${}_{\bar 1}H^{(w)}_{yz}$
${}_1q^{zx}_{uv}$,	${}_1q^{zx}_{vy}$,	${}_1q^{zx}_{yu}$	${}_{\bar 1}H^y_{zx}$,	${}_{\bar 1}H^u_{zx}$,	${}_{\bar 1}H^v_{zx}$	${}_1H^{(w)}_{zx}$
${}_1H^z_{uv}$,	${}_1D^{z/v}_{xy}$,	${}_1D^{z/u}_{xy}$	${}_1g_{xyz}$,	${}_2h^u_{vw}$,	${}_2h^v_{wu}$	
alignés (théor. XX).			*concourantes.*			

Donc le point de concours ${}_2G_{uvw}$ de ${}_2h^u_{vw}$ et de ${}_2h^v_{wu}$ *est uni à* ${}_1g_{xyz}$.

C. Q. F. D.

La précédente série de théorèmes suffit pour établir l'existence des diverses textures et ensembles d'éléments latéraux et d'éléments de Depaz, et l'extension à ces nouveaux ensembles des propriétés établies pour les précédents.

La texture (ponctuelle) de premier rang inférieur étant en effet pourvue d'une ossature réglée (commune aussi à la texture qui a *même rang absolu* et qui lui est *latéralement reliée*, savoir celle des kirkmanns), deux quelconques (soit x_2 et y_2) des six *figures polaires* en lesquelles se divise cette première texture inférieure (théorème XVI, corollaire III) contiendront chacune l'un de deux quadrangles (${}_{\bar{1}}H^x_y$ et ${}_{\bar{1}}H^y_x$) *raccordables par un centre* (${}_1J_{xy}$) *de cette ossature, et relatifs à deux quadruplets d'associés conjugalement homologues* (W^x_y et W^y_x).

Le quadrilatère de raccordement de cette paire de quadrangles sera le quadrilatère d'éléments de la texture (réglée) ${}_{\bar{2}}h$ de second rang inférieur, *relatif au quadruplet d'isodiagonaux qui se rapporte à la combinaison binaire des systèmes de Kirkmann auxquels se rattachent les deux figures polaires envisagées.*

Chacun des quatre côtés de ce quadrilatère sera univoquement rattaché, comme élément de texture de second rang inférieur, à celui des quatre hexagones isodiagonaux qui est le correspondant *de la paire de triplets* (d'associés conjugalement homologues) *relative à la paire de triangles* (des précédents quadrangles) *qui ont pour axe d'homologie le côté envisagé du quadrilatère.*

(Cette méthode n'est autre que la quadruple application simultanée du procédé P aux quatre paires de triangles homologues de deux quadrangles d'éléments de premier rang inférieur, relatifs à deux quadruplets d'associés conjugalement homologues.)

On fera alors *une répétition des six théorèmes de la série*, en changeant réciproquement les unes dans les autres *majuscules et minuscules*, et augmentant d'une unité *la valeur absolue* de tous les indices *numériques.*

Il résultera de cette répétition :

1° La construction (extension du théorème XVI) de la texture *ponctuelle de troisième rang* ${}_3H$ (chacun de ses éléments étant *le*

centre d'homologie de deux triangles d'éléments ${}_2h$ relatifs à deux triplets d'isodiagonaux conjugalement homologues); l'*intime union*, analogue à celle des pascales et des kirkmanns, de cette nouvelle texture ${}_3\mathrm{H}$ avec la texture réglée de second rang inférieur ${}_{\bar{2}}h$, et la division, en six figures polaires, de l'ensemble de ces deux textures *unies;*

2° L'existence, pour *la seconde texture inférieure* ${}_{\bar{2}}h$ (extension du théorème XVII) *de la même ossature* ${}_2\mathrm{G}$ *propre aux éléments de seconde texture supérieure* ${}_2h$ et complémentaire de l'ossature précédente ${}_1g$; et pour la troisième texture supérieure ${}_3\mathrm{H}$, l'existence (extension des théorèmes XVIII et XIX) d'une ossature réglée ${}_3g$, *complémentaire* (extension des théorèmes XX et XXI) *de l'ossature ponctuelle précédente* ${}_2\mathrm{G}$.

Le deuxième latéral ${}_2\mathrm{Q}^{yz}_{xu}$, relatif au doublet d'isodiagonaux W^{yz}_{xu}, est *par définition* le point de concours des éléments de texture de second rang supérieur : ${}_2h^y_{xu}$ et ${}_2h^z_{xu}$, et il sera aussi uni aux deux éléments de second rang inférieur : ${}_{\bar{2}}h^x_{yz}$ et ${}_{\bar{2}}h^u_{yz}$.

Les deux textures des seconds rangs supérieur et inférieur sont donc latéralement reliées, comme le sont celles des premiers rangs.

La droite de Depaz de second rang ${}_2d^{x|y}_{zu}$ est la droite de jonction des deux latéraux de second rang *contigus :* ${}_2\mathrm{Q}^{xz}_{yu}$ et ${}_2\mathrm{Q}^{xu}_{yz}$.

[Les 180 droites de Depaz *de rang fondamental* ${}_0d$ coïncident douze par douze avec les quinze côtés de l'hexangle; par exemple, celle ${}_0d^{x|y}_{zu}$ qui unit les deux latéraux *fondamentaux* (points diagonaux) *contigus* ${}_0\mathrm{Q}^{xz}_{yu}$ et ${}_0\mathrm{Q}^{xu}_{yz}$, est *le côté* $d_{xy.zu.vw}$.]

De la texture inférieure ${}_{\bar{2}}h$, on déduira par le procédé P (appliqué soit isolément à chaque paire de triplets conjugalement homologues, soit simultanément aux quatre paires de triplets homologues de deux quadruplets conjugalement homologues) la texture inférieure antécédente ${}_{\bar{3}}\mathrm{H}$ de l'échelle, et l'on fera une nouvelle répétition des six théorèmes de la série, etc.

L'existence des diverses textures et ensembles d'éléments latéraux et d'éléments de Depaz est donc établie. La texture inférieure de rang $\bar{k}$ et la texture supérieure de rang $k+1$ forment *une paire de textures unies*. Deux textures *de même rang absolu*, l'une infé-

rieure, l'autre supérieure, forment *une paire de textures latéralement reliées* et ont toujours *même ossature* (extension du théorème XVIII); leur rang absolu commun sera *provisoirement* attribué à leur commune ossature, et deux ossatures de rangs *consécutifs quelconques* seront toujours *complémentaires* (extension du théorème XXI).

5. Il ne faut pas attacher grande importance aux qualificatifs de « *supérieur* » ou d' « *inférieur* » que nous attribuons aux divers ensembles de la configuration. Les notions à retenir sont celles de « *paire de textures unies* » et de « *paire de textures latéralement reliées* ».

Les procédés antérieurement décrits P et P′ doivent d'ailleurs être plutôt considérés comme des méthodes d'exposition. Dans la pratique, et notamment dans les calculs, on leur substituera de préférence les *opérations involutives* U et R, en lesquelles se décomposent ces procédés P et P′, et qui sont ainsi définies :

L'opération U consiste dans le passage d'une texture à la texture qui lui est unie, chaque élément de l'une, relatif à un hexagone donné, étant considéré comme élément de jonction ou d'intersection commun aux trois éléments de l'autre, relatifs aux trois hexagones séparés du premier.

L'opération R consiste dans le passage d'une texture à la texture qui lui est latéralement reliée. Les 60 éléments d'une texture (telle ${}_{2n}h$) étant groupés en 15 quadruplets (correspondant aux 15 quadruplets d'isodiagonaux), on formera pour chacun de ces quadruplets (tel ${}_{2n}h_{xy}$) le sextuplet (tel ${}_{2n}Q_{xy}$) des six latéraux d'union deux à deux des éléments constitutifs de ce quadruplet; on regroupera alors les 90 éléments de l'ensemble de latéraux obtenus en 15 *nouveaux* sextuplets (tel ${}_{2n}Q^{zu}$), et les éléments de chaque sextuplet seront trois par trois unis à l'un de quatre nouveaux éléments (de la texture ${}_{\overline{2n}}h$, et formant le quadruplet ${}_{\overline{2n}}h_{zu}$). La texture des 60 nouveaux éléments ${}_{\overline{2n}}h$, texture latéralement reliée à la texture envisagée ${}_{2n}h$, est le résultat de l'opération R appliquée à cette dernière.

Entre les opérations P, P′, U, R, on a les relations

$$P = UR; \quad P' = RU; \quad U^2 = 1; \quad R^2 = 1; \quad PP' = 1.$$

Observons encore qu'on n'obtient, par les procédés P et P′, *toutes* les textures qui s'obtiennent par application alternative et successive à la texture fondamentale des pascales des opérations R et U, que *grâce à la particularité de cette texture fondamentale d'être latéralement reliée à elle-même*, c'est-à-dire *de se transformer en elle-même par l'opération* R. Mais nous rencontrerons d'autres textures fondamentales dites *spéciales* (11) déduites des *éléments irréguliers* (7), et qui ne sont pas latéralement reliées à elles-mêmes, non plus que celles qui s'en déduisent par les opérations R et U. On n'obtient alors, par les procédés P ou P′, que les textures déduites de la fondamentale par les opérations $(UR)^n$ et $(RU)^n$ (n parcourant les entiers positifs), et non celles déduites par les opérations $(UR)^n U$ et $(RU)^n R$.

La notation employée, que nous appellerons *notation* (pp') (nous l'avons adoptée parce qu'elle facilite la lecture des schémas), devient donc insuffisante pour désigner les ensembles déduits des textures *spéciales* fondamentales, et nous utiliserons alors une autre notation, que nous appelons notation (ru). La texture spéciale fondamentale envisagée étant toujours caractérisée par l'indice numérique 0, celle qui s'en déduit par une *suite alternative* d'opérations U et R, *en nombre total* k, sera caractérisée par l'indice numérique *simplement accentué* k' si l'opération U a été appliquée la première, et par l'indice numérique *doublement accentué* k'', si l'opération R a été appliquée la première.

Si l'on se propose de calculer les coordonnées des éléments des diverses textures et ensembles de latéraux d'un hexangle pascalien à partir de celles de ses sommets, on dressera successivement les tableaux des coordonnées : 1° des 15 côtés d; 2° des 45 points diagonaux Q; 3° des 60 pascales, éléments de la texture fondamentale ${}_0h$; 4° des 60 kirkmanns, éléments de la première texture supérieure ${}_1H$; 5° des 90 éléments du premier ensemble de latérales ${}_1q$; 6° des 60 points de première texture inférieure ${}_{\bar{1}}H$; 7° des 60 droites de seconde texture supérieure ${}_2h$; 8° des 90 éléments du deuxième ensemble de latéraux ${}_2Q$; etc. Chacun de ces tableaux se déduit du précédent, chacun de ses éléments étant uni à deux ou trois éléments du tableau précédent.

C'est une telle série de tableaux, dressés jusqu'à la quatrième texture supérieure inclusivement, qui nous a conduit, par induction

empirique, à diverses propositions ici établies, et notamment à reconnaître la coïncidence des diverses ossatures ponctuelles ainsi que celle des diverses ossatures réglées, et l'union de tout élément latéral à un élément de Bally [1].

Tout élément de texture de ces tableaux numériques est en effet uni soit au point de Steiner, soit à la droite de Cayley-Salmon du semi-système steinérien de l'hexagone correspondant, et tout élément latéral est uni à l'élément de Bally du doublet d'isodiagonaux correspondant.

Il n'est pas malaisé de montrer (extension du théorème XVII) que deux textures *latéralement reliées* (c'est-à-dire de même rang absolu, l'une inférieure, l'autre supérieure) ont même ossature; mais pour établir que *les deux textures respectivement unies à deux textures latéralement reliées ont même ossature*, proposition qui entraîne la coïncidence définitive des ossatures ponctuelles et celle des ossatures réglées, on rencontre plus de difficultés.

Cette propriété générale des éléments de texture, d'être unis aux éléments d'ossature est, ainsi qu'on le verra (6), intimement liée à la propriété des éléments latéraux d'être unis aux éléments de Bally.

Toutefois, dans le cas *particulier* de seconde texture supérieure, on peut donner une démonstration simple et immédiate de la propriété [2] qu'ont les droites de cette texture d'être unies aux points de Steiner.

Nous ne l'avons pas jusqu'ici donnée, pour que l'attention ne fût pas détournée du caractère *général* des démonstrations précédentes.

Il faut prouver que *les deux points de premier rang inférieur* ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{uv}$ et ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{uw}$, *unis à la droite de second rang supérieur* ${}_{2}h^{x}_{yz}$,

---

(1) Ces tableaux sont construits pour un hexangle *particulier :* trois sommets X, Y, Z étant pris pour triangle de référence, et un quatrième U pour point-unité, les deux autres sommets A et B avaient pour coordonnées respectives, 1, 2, 3 et 1, 5, —15. Les côtés ZX et YA de l'hexangle se trouvent alors *conjugués* à la conique circonscrite à l'hexangle, ce qui introduit dans les textures certaines singularités (en petit nombre).

Nous tenons ces tableaux à la disposition du lecteur qui nous manifesterait le désir de les avoir pour rechercher de nouvelles propriétés de la configuration; il lui faudrait sans doute construire encore quelques tableaux.

(2) Cette propriété est mentionnée dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (III, 17, Coniques, n° 40, p. 91) *pour les droites de cette unique texture* ${}_{2}h$ qui y sont dénommées : *les droites* z_2.

sont alignés avec le point de Steiner G_{xyz} :

$Q_{xy.zv}$, $Q_{xy.zw}$, ${}_1H^u_{xy}$	${}_1q^{uv}_{xy}$, ${}_1q^{uw}_{xy}$, ${}_0h^z_{xy}$
$Q_{xz.yv}$, $Q_{xz.yw}$, ${}_1H^u_{xz}$	${}_1q^{uv}_{xz}$, ${}_1q^{uw}_{xz}$, ${}_0h^y_{xz}$
$d_{yz.xv.uw}$, $d_{xw.yz.uv}$, ${}_0h^u_{vw}$	${}_{\bar 1}H^x_{uv}$, ${}_{\bar 1}H^x_{uw}$, G_{xyz}
concourantes en $Q_{xu.vw}$	*alignés* (sur ${}_2h^x_{yz}$)

C. Q. F. D.

Cette démonstration est, comme on voit, *particulière*, et repose sur la propriété *spéciale* qu'ont les *premières* latérales d'être unies aux éléments latéraux de rang précédent (points diagonaux).

Dans ce qui va suivre, il n'en sera donc tenu aucun compte.

6. On peut appeler *ossature d'un ensemble d'éléments latéraux* l'ensemble des 45 éléments de jonction ou d'intersection *des paires d'éléments inverses du premier ensemble.*

Cette ossature *n'est pas définie* dans le cas de l'ensemble des latéraux fondamentaux ou *points diagonaux*, deux latéraux fondamentaux *inverses*, tels ${}_0Q^{xy}_{zu}$ et ${}_0Q^{zu}_{xy}$, coïncidant tous deux avec le point diagonal $Q_{xy.zu}$, et leur droite de jonction étant donc indéterminée. *Par définition*, l'élément d'ossature latérale fondamentale correspondant à ce double latéral fondamental, de soi-même inverse, sera *la droite de Bally* $b_{xy.zu}$, qui unit ce point diagonal au centre de Salmon J_{vw}.

Nous avons en vue, dans ce numéro, l'établissement du théorème général qui va suivre, affirmant la coïncidence : 1° des ossatures des diverses textures réglées avec l'ossature propre aux pascales (points de Steiner); 2° des ossatures des diverses textures ponctuelles avec l'ossature propre aux kirkmanns (droites de Cayley-Salmon); 3° des ossatures des divers ensembles de latérales avec l'ensemble des 45 points de Bally; 4° des ossatures des divers ensembles de points latéraux avec l'ensemble des 45 droites de Bally.

Théorème général de Bally. — *Tout élément de texture réglée ou ponctuelle arbitraire, relatif à un hexagone, est uni au point de Steiner ou à la droite de Cayley-Salmon du semi-système steinérien auquel appartient cet hexagone.*

Tout élément latéral est uni soit à la droite de Bally, soit au point de Bally, relatifs au doublet d'isodiagonaux auquel correspond cette latérale.

(Le point, ou la droite, de Bally, relatif à un doublet d'isodiagonaux, est celui de ces points, ou celle de ces droites, qui est affecté de la paire de combinaisons binaires figurant dans l'expression du doublet. A deux doublets *inverses* correspond le même point, ainsi que la même droite, de Bally.)

Considérons les quatre propositions suivantes, respectivement désignées par G_{2m}, b_{2p}, g_{2r+1}, B_{2k+1} (m, p, r, k, étant chacun un entier *donné*, *positif ou nul*) :

G_{2m} : La droite de texture supérieure de rang $2m$, relative à chaque hexagone, est unie à la droite de Cayley-Salmon du semi-système steinérien auquel appartient cet hexagone;

b_{2p} : Chaque point latéral de rang $2p$ est uni à la droite de Bally relative au doublet d'isodiagonaux correspondant à ce point latéral;

g_{2r+1} : Le point de texture supérieure de rang $2r+1$, relatif à un hexagone, est uni à la droite de Cayley-Salmon du semi-système steinérien auquel appartient cet hexagone;

B_{2k+1} : Chaque latérale de rang $2k+1$ est unie au point de Bally relatif au doublet d'isodiagonaux correspondant à cette latérale.

Le théorème général est l'ensemble des quatre suites de propositions :

$$G : (G_0, G_2, G_4, \ldots, G_{2n}, \ldots),$$
$$b : (b_0, b_2, b_4, \ldots, b_{2n}, \ldots,$$
$$g : (g_1, g_3, g_5, \ldots, g_{2n+1}, \ldots),$$
$$B : (B_1, B_3, B_5, \ldots, B_{2n+1}, \ldots),$$

auxquelles vient s'adjoindre l'*extension légitime* du théorème XVII, assurant la coïncidence des ossatures de deux textures *latéralement reliées* (de même rang absolu).

Les propositions de ces quatre suites, relatives à quatre classes distinctes de propriétés, s'entraînent les unes les autres par un curieux enchaînement.

Disposons-les *en une unique nouvelle suite* S, ainsi définie :

Cette nouvelle suite S, étant supposée partagée, à partir de son extrémité initiale, en quadruplets consécutifs d'éléments consécutifs, son $n^{\text{ième}}$ quadruplet est, quel que soit n, formé des quatre éléments de rang n des suites précédentes, *pris dans l'ordre* (G, b, g, B) :

$$S : (G_0, b_0, g_1, B_1, G_2, b_2, g_3, B_3, \ldots, G_{2n}, b_{2n}, g_{2n+1}, B_{2n+1}, \ldots).$$

Nous établirons que : *Toute proposition de cette nouvelle suite* S, *dont le rang* (dans cette suite) *est postérieur au quatrième*, *est une conséquence*, *si elle est une* B *ou une* b, *des cinq propositions immédiatement précédentes* (ainsi que des théorèmes antérieurs et de leurs extensions légitimes); *et si elle est une* G *ou une* g, *de trois des quatre propositions immédiatement précédentes.*

Si l'on suppose démontrée cette assertion, établie plus loin par les lemmes II et III, le théorème général devient une simple conséquence des quatre propositions initiales de la suite S; c'est-à-dire, en définitive, une simple conséquence *de l'unique proposition* B_1, les trois premières G_0, b_0, g_1, étant déjà établies, ou résultant d'une définition.

(G_0 affirme que chaque pascale est unie à son point de Steiner; b_0, que chaque point diagonal est uni à la droite de Bally qui, *par définition*, unit ce point diagonal au centre correspondant de Salmon; g_1, que chaque kirkmann est uni à sa droite de Cayley-Salmon.)

D'ailleurs cette proposition B_1, qui s'énonce ainsi :

« *Chaque première latérale* ${}_1q^{xy}_{zu}$ *est unie au point de concours* $B_{xy.zu}$ (point de Bally) *de l'axe de Steiner-Plücker* j_{vw} *et du côté* $d_{xy.zu.vw}$ *de l'hexangle*, »

va se présenter comme simple corollaire du lemme général suivant, lemme qui servira encore aux fins d'établir : 1° le lemme III démontrant que toute proposition G ou g de la suite S découle de trois des quatre précédentes; 2° la propriété des éléments de Depaz d'être unis aux éléments de Bally.

Lemme général I. — *La latérale de rang* $2n-1$ (n positif non nul) : ${}_{2n-1}q^{zu}_{xy}$, *les deux droites de Depaz de rang* $2n-2$: ${}_{2n-2}d^{w/v}_{zu}$ *et* ${}_{2n-2}d^{v/w}_{zu}$, *ainsi que l'axe de* $(2n-2)^{\text{ième}}$ *ossature :* ${}_{2n-2}i_{vw}$ *sont concourants.*

Le latéral de rang $2n$: ${}_{2n}Q^{zu}_{xy}$, *les deux points de Depaz de rang* $2n-1$: ${}_{2n-1}D^{w/v}_{zu}$ *et* ${}_{2n-1}D^{v/w}_{zu}$, *ainsi que le centre de* $(2n-1)^{\text{ème}}$ *ossature :* ${}_{2n-1}J_{vw}$, *sont alignés.*

On peut se borner à la démonstration de la première, par exemple des deux parties du lemme, la seconde s'en déduisant par simple per-

mutation de majuscules et de minuscules, et augmentation d'une unité de la valeur absolue de tous les indices numériques.

Il suffit donc de montrer que l'une quelconque des deux droites de Depaz, soit, par exemple, la première ${}_{2n-2}d^{w|v}_{zu}$, est concourante avec *la latérale et l'axe d'ossature mentionnés.*

$$\begin{array}{ccc|ccc}
{}_{2n-1}g_{xyz}, & {}_{\overline{2n-2}}h^{v}_{uw}, & {}_{\overline{2n-2}}h^{z}_{uw} & {}_{2n-2}Q^{uw}_{zv}, & {}_{2n-1}H^{z}_{xy}, & {}_{2n-2}G_{uvw} \\
{}_{2n-1}g_{xyu}, & {}_{\overline{2n-2}}h^{v}_{zw}, & {}_{\overline{2n-2}}h^{u}_{zw} & {}_{2n-2}Q^{zw}_{uv}, & {}_{2n-1}H^{u}_{xy}, & {}_{2n-2}G_{zvw} \\
\hline
{}_{2n-1}J_{xy}, & {}_{2n-1}H^{v}_{xy}, & {}_{2n-2}G_{zuw} & {}_{2n-2}d^{w|v}_{zu}, & {}_{2n-1}q^{zu}_{xy}, & {}_{2n-2}j_{vw} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } {}_{2n-1}g_{xyv}} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes.}}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Si dans l'énoncé et le schéma précédents on fait $n = 1$, la latérale et l'axe d'ossature envisagés deviennent respectivement *la première latérale* ${}_1q^{zu}_{xy}$ et *l'axe de Steiner-Plücker* j_{vw}; la droite de Depaz *de rang fondamental* ${}_0d^{w|v}_{zu}$, droite de jonction des deux latéraux fondamentaux contigus ${}_0Q^{uw}_{zv}$ et ${}_0Q^{zw}_{uv}$, coïncide (de même que l'autre droite de Depaz ${}_0d^{v|w}_{zu}$) avec *le côté* $d_{xy.zu.vw}$ *de l'hexangle*, et l'énoncé du lemme se transforme en celui de *la proposition* B_1, qui est donc établie.

Lemme II. — *La proposition* B_{2n+1} *de la suite* S (n non nul) *résulte des* cinq *précédentes :*

$$g_{2n-1},\quad B_{2n-1},\quad G_{2n},\quad b_{2n},\quad g_{2n+1}.$$

La proposition b_{2n} (n non nul) *résulte des* cinq *précédentes :*

$$G_{2n-2},\quad b_{2n-2},\quad g_{2n-1},\quad B_{2n-1},\quad G_{2n}.$$

De même que pour le précédent, il suffit d'établir la première, par exemple, des deux parties de ce lemme. (Nous supprimons les indices numériques respectifs 0 et 1 des éléments des configurations de Steiner et de Cayley-Salmon.)

Les propositions g_{2n-1}, G_{2n}, g_{2n+1} (ainsi que les théorèmes antérieurs et leurs extensions légitimes) nous permettent d'écrire le schéma :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
g_{xyz}, & {}_{\overline{2n}}h^{z}_{vw}, & {}_{2n}h^{z}_{vw} & G_{zvw}, & {}_{\overline{2n-1}}H^{z}_{xy}, & {}_{2n+1}H^{z}_{xy} \\
g_{xyu}, & {}_{\overline{2n}}h^{u}_{vw}, & {}_{2n}h^{u}_{vw} & G_{uvw}, & {}_{\overline{2n-1}}H^{u}_{xy}, & {}_{2n+1}H^{u}_{xy} \\
\hline
J_{xy}, & {}_{2n}Q^{vw}_{zu}, & {}_{2n}Q^{zu}_{vw} & j_{vw}, & {}_{2n-1}q^{xy}_{zu}, & {}_{2n+1}q^{zu}_{xy}
\end{array}$$

On vérifie par l'analyse du schéma que toute relation d'incidence

entre deux éléments *déclarés unis par ce schéma* ne résulte, en dehors des théorèmes antérieurs et de leurs extensions légitimes, que des propositions mentionnées.

Les trois points de la troisième ligne du premier tableau étant, *d'après* b_{2n}, alignés (sur la droite de Bally $b_{zu.vw}$), les trois droites de la troisième ligne du second tableau seront concourantes.

Le point de concours des deux premières étant, *d'après* B_{2n-1}, le point de Bally $B_{xy.zu}$, il en résulte la proposition :

B_{2n+1} : « *La latérale de rang* $2n+1$: ${}_{2n+1}q^{zu}_{xy}$ *est unie au point de Bally :* $B_{xy.zu}$ ». C. Q. F. D.

Lemme III. — *La proposition* G_{2n} *résulte de* G_{2n-2}, g_{2n-1}, B_{2n-1}; *la proposition* g_{2n+1} *résulte de* g_{2n-1}, G_{2n}, b_{2n}.

Il suffit encore d'établir la première partie du lemme.

L'exactitude *admise* des propositions G_{2n-2}, g_{2n-1}, B_{2n-1} nous permet d'écrire le schéma incomplet :

$$\begin{array}{ccc|ccc} {}_{2n-1}q^{uv}_{xw}, & {}_{2n-1}q^{uw}_{xv}, & g_{uvw} & {}_{\underline{2n-1}}H^{v}_{uw}, & {}_{\underline{2n-1}}H^{w}_{uv}, & {}_{2n-1}D^{u/x}_{vw} \\ {}_{2n-1}q^{xw}_{uv}, & {}_{2n-1}q^{xv}_{uw}, & {}_{\underline{2n-2}}h^{x}_{yz} & {}_{2n-1}H^{x}_{uw}, & {}_{2n-1}H^{x}_{uv}, & {}_{2n-1}D^{x/u}_{vw} \\ \hline B_{xw.uv}, & B_{xv.uw}, & G_{xyz} & & & \\ \multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } j_{yz}.} & & & \end{array}$$

Les deux triangles du schéma sont donc homologiques.

Or il résulte du Lemme général I que leurs sommets homologues ${}_{2n-1}D^{u/x}_{vw}$ et ${}_{2n-1}D^{x/u}_{vw}$ *sont alignés avec le point* ${}_{2n-1}J_{xu}$, lequel n'est autre, *d'après la* g_{2n-1}, que le centre de Salmon J_{xu}.

Le premier de ces deux triangles est donc aussi homologique à celui qui se déduit du second quand on y remplace le sommet ${}_{2n-1}D^{x/u}_{vw}$ par le centre de Salmon J_{xu}. La nouvelle paire de triangles homologiques est alors :

$$\begin{array}{ccc|ccc} {}_{\underline{2n-1}}H^{v}_{uw}, & {}_{\underline{2n-1}}H^{w}_{uv}, & {}_{2n-1}D^{u/x}_{vw} & {}_{2n-1}q^{uv}_{xw}, & {}_{2n-1}q^{uw}_{xv}, & g_{uvw} \\ {}_{2n-1}H^{x}_{uw}, & {}_{2n-1}H^{x}_{uv}, & J_{xu} & g_{xuv}, & g_{xuw}, & {}_{\underline{2n-2}}h^{x}_{yz} \\ \cline{4-6} & & & {}_{\underline{2n-1}}H^{x}_{uv}, & {}_{\underline{2n-1}}H^{x}_{uw}, & G_{xyz} \\ & & & \multicolumn{3}{c}{\textit{alignés.}} \end{array}$$

Donc, la droite de jonction des points de texture inférieure ${}_{\underline{2n-1}}H^{x}_{uv}$ et ${}_{\underline{2n-1}}H^{x}_{uw}$, *laquelle est la droite de* $2n^{\text{ième}}$ *texture supérieure* ${}_{2n}h^{x}_{yz}$, *est unie au point de Steiner* G_{xyz}. C. Q. F. D.

Enfin, nous avons réussi à fixer aux éléments de leur *véritable et*

commune ossature ces insaisissables éléments *des textures supérieures*, se dérobant sans cesse aux prises du raisonnement, et n'acceptant leurs chaînes, par ensembles consécutifs d'éléments de même rang, qu'à la suite de chaque ensemble d'éléments latéraux de rang absolu précédent.

Les éléments des textures inférieures viennent alors d'eux-mêmes s'attacher aux éléments de Steiner ou de Cayley-Salmon (extension du Théorème XVII), et le Théorème général est établi.

Revenant maintenant au Lemme général I, il résulte immédiatement du Théorème général que la droite d'alignement ou le point de concours des éléments envisagés dans le lemme est *l'élément de Bally* affecté de la paire de combinaisons binaires : $xy.zu$, d'où :

Théorème XXII. — *Quel que soit n, les quatre points de Depaz*

$$ {}_{2n-1}\mathrm{D}^{v/w}_{zu}, \quad {}_{2n-1}\mathrm{D}^{w/v}_{zu}, \quad {}_{2n-1}\mathrm{D}^{v/w}_{xy}, \quad {}_{2n-1}\mathrm{D}^{w/v}_{xy} $$

sont unis à la droite de Bally $b_{xy.zu}$; *et les quatre droites de Depaz*

$$ {}_{2n}d^{v/w}_{zu}, \quad {}_{2n}d^{w/v}_{zu}, \quad {}_{2n}d^{v/w}_{xy}, \quad {}_{2n}d^{w/v}_{xy} $$

sont unies au point de Bally $\mathrm{B}_{xy.zu}$.

7. Théorème XXIII. — *Les trois points de Depaz de premier rang*

$$ {}_{1}\mathrm{D}^{z/u}_{xy}, \quad {}_{1}\mathrm{D}^{z/v}_{xy}, \quad {}_{1}\mathrm{D}^{z/w}_{xy} $$

sont unis à la pascale ${}_0h^z_{xy}$.

Les droites de jonction de ces trois points deux à deux, unissant chacune (Théorème XX) l'un des trois kirkmanns : ${}_1\mathrm{H}^z_{vw}$, ${}_1\mathrm{H}^z_{wu}$, ${}_1\mathrm{H}^z_{uv}$, à l'un des trois points : $\mathrm{Q}_{xy.zu}$, $\mathrm{Q}_{xy.zv}$, $\mathrm{Q}_{xy.zw}$, se confondent toutes trois avec la pascale ${}_0h^z_{xy}$. C. Q. F. D.

Théorème XXIV. — *Tous les éléments jusqu'ici obtenus appartiennent à la configuration pascalienne* (au sens indiqué au début du n° 1).

On a reconnu, comme éléments de la configuration : les points diagonaux, côtés, sommets, pascales, kirkmanns, points de Steiner, axes de Steiner-Plücker, droites de Cayley-Salmon, centres de Salmon.

L'adjonction des *premières latérales* (portant chacune deux kirk-

manns et un point diagonal) est immédiate; donc aussi celle des *points de premier rang inférieur* (unis chacun à trois premières latérales et à une droite de Cayley-Salmon), des *droites de second rang supérieur* (unies chacune à trois points de premier rang inférieur et à un point de Steiner), des *points de Bally* (unis chacun à deux premières latérales, à un côté de l'hexangle et à un axe de Steiner-Plücker), des *fausses pascales* (portant chacune trois points de Bally et un point de Steiner).

Les points de Depaz *de premier rang* appartiennent aussi à la configuration (chacun d'eux étant commun à deux premières latérales *contiguës* et à une pascale), d'où résulte la même propriété pour les droites de Bally (unies chacune à un point diagonal, à un centre de Salmon et à quatre points de Depaz de premier rang), et pour les faux kirkmanns (unis chacun à trois droites de Bally et à une droite de Cayley-Salmon).

Enfin, un élément latéral de rang arbitraire est uni à un élément de Bally ainsi qu'à deux éléments de la texture supérieure de même rang que cet élément latéral et précédemment obtenue; un élément de texture inférieure est uni à trois éléments latéraux de même rang absolu et précédemment obtenus, ainsi qu'à un élément d'ossature; un élément de texture supérieure est uni à trois éléments de texture inférieure de rang absolu précédent et précédemment obtenus, ainsi qu'à un élément d'ossature; un élément de Depaz est uni à un élément de Bally ainsi qu'à deux éléments latéraux contigus de ce même rang précédemment obtenus. C. Q. F. D.

8. Si l'on considère deux triplets *d'associés irrégulièrement homologues* : $\mathrm{W}^x_{w(z)}$ et $\mathrm{W}^y_{w(z)}$, les deux triangles d'éléments *d'une même texture*, relatifs aux hexagones de ces triplets, sont homologiques, les éléments principaux de cette homologie étant un point et une droite de texture.

Ainsi, les deux triangles ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^x_{w(z)}$ et ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^y_{w(z)}$, qui coïncident avec les triangles ${}_{2n}h^x_{z(w)}$ et ${}_{2n}h^y_{z(w)}$, sont homologiques par le centre ${}_{2n-1}\mathrm{H}^w_{xy}$ et l'axe ${}_{\overline{2n}}h^z_{xy}$, comme l'indique le schéma suivant :

${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^x_{w(z)}$ ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^y_{w(z)}$	${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^x_{wu}$, ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^x_{wv}$, ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^x_{wy}$ ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^y_{wu}$, ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^y_{wv}$, ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^y_{wx}$ ――――――――― ${}_{2n-1}q^{wu}_{xy}$, ${}_{2n-1}q^{wv}_{xy}$, g_{wxy} *concourantes en* ${}_{2n-1}\mathrm{H}^w_{xy}$.	${}_{2n}h^x_{zu}$, ${}_{2n}h^x_{zv}$, ${}_{2n}h^x_{zy}$ ${}_{2n}h^y_{zu}$, ${}_{2n}h^y_{zv}$, ${}_{2n}h^y_{zx}$ ――――――――― ${}_{2n}\mathrm{Q}^{xy}_{zu}$, ${}_{2n}\mathrm{Q}^{xy}_{zv}$, G_{xyz} *alignés sur* ${}_{\overline{2n}}h^z_{xy}$.	${}_{2n}h^x_{z(w)}$ ${}_{2n}h^y_{z(w)}$

On n'obtient donc ainsi que des éléments dejà obtenus. Mais les paires de triplets *d'isodiagonaux irrégulièrement homologues*, telle la paire $W^{(w)}_{yz}$ et $W^{(w)}_{zx}$, nous conduiront à de *nouveaux éléments*.

Les deux triangles ${}_{2n+1}H^{(w)}_{yz}$ et ${}_{2n+1}H^{(w)}_{zx}$ sont homologiques par le point de Steiner G_{uvw}, les droites de jonction de leurs sommets homologues étant deux droites de texture et une droite de Cayley-Salmon unies à ce point (premier schéma du Théorème XXV).

Leur axe d'homologie sera par définition *l'axe irrégulier supérieur de rang* $2n+1$ *relatif à la paire de triplets envisagés*, et sera désigné par la notation ${}_{2n+1}i^{z/w}_{xy}$.

De même, l'axe d'homologie des triangles ${}_{\overline{2n+1}}H^{(w)}_{yz}$ et ${}_{\overline{2n+1}}H^{(w)}_{zx}$, homologiques par le même point de Steiner G_{uvw}, sera *un axe irrégulier inférieur de rang* $\overline{2n+1}$, et sera désigné par l'expression ${}_{\overline{2n+1}}i^{z/w}_{xy}$.

On définit de même *les centres irréguliers* supérieur ou inférieur; ${}_{2n}I^{z/w}_{xy}$ ou ${}_{\overline{2n}}I^{z/w}_{xy}$, comme centres respectifs d'homologie des paires de triangles ${}_{2n}h^{(w)}_{yz}$ et ${}_{2n}h^{(w)}_{zx}$, ou ${}_{\overline{2n}}h^{(w)}_{yz}$ et ${}_{\overline{2n}}h^{(w)}_{zx}$, homologiques par la droite de Cayley-Salmon g_{uvw}.

Théorème XXV. — 1° *Les deux points de Depaz* ${}_{2n+1}D^{u/z}_{xy}$ *et* ${}_{2n+1}D^{v/z}_{xy}$, *le latéral* ${}_{2n+2}Q^{xy}_{zw}$ *et le point de texture inférieure* ${}_{\overline{2n+1}}H^{z}_{uv}$ *sont alignés sur l'axe irrégulier supérieur* ${}_{2n+1}i^{z/w}_{xy}$.

2° *Les deux points de Depaz* ${}_{2n+1}D^{z/u}_{xy}$ *et* ${}_{2n+1}D^{z/v}_{xy}$, *le latéral* ${}_{2n}Q^{zw}_{xy}$ *et le point de texture supérieure* ${}_{2n+1}H^{z}_{uv}$ *sont alignés sur l'axe irrégulier inférieur* ${}_{\overline{2n+1}}i^{z/w}_{xy}$.

3° *Les deux droites de Depaz* ${}_{2n}d^{u/z}_{xy}$ *et* ${}_{2n}d^{v/z}_{xy}$, *la latérale* ${}_{2n+1}q^{xy}_{zw}$ *et la droite de texture inférieure* ${}_{\overline{2n}}h^{z}_{uv}$ *sont concourantes au centre irrégulier supérieur* ${}_{2n}I^{z/w}_{xy}$.

4° *Les deux droites de Depaz* ${}_{2n}d^{z/u}_{xy}$ *et* ${}_{2n}d^{z/v}_{xy}$, *la latérale* ${}_{2n-1}q^{zw}_{xy}$ *et la droite de texture supérieure* ${}_{2n}h^{z}_{uv}$ *sont concourantes au centre irrégulier inférieur* ${}_{\overline{2n}}I^{z/w}_{xy}$.

Pour établir par exemple la première de ces quatre propositions, considérons d'abord les deux triangles ${}_{2n+1}H^{(w)}_{yz}$ et ${}_{2n+1}H^{(w)}_{zx}$, dont l'axe d'homologie est *par définition* l'axe irrégulier supérieur ${}_{2n+1}i^{z/w}_{xy}$:

${}_{2n+1}H^{(w)}_{yz}$	${}_{2n+1}H^{u}_{yz}$, ${}_{2n+1}H^{v}_{yz}$, ${}_{2n+1}H^{x}_{yz}$	${}_{2n+1}q^{vx}_{yz}$, ${}_{2n+1}q^{ux}_{yz}$, ${}_{2n+1}q^{uv}_{yz}$
${}_{2n+1}H^{(w)}_{zx}$	${}_{2n+1}H^{u}_{zx}$, ${}_{2n+1}H^{v}_{zx}$, ${}_{2n+1}H^{y}_{zx}$	${}_{2n+1}q^{vy}_{zx}$, ${}_{2n+1}q^{uy}_{zx}$, ${}_{2n+1}q^{uv}_{zx}$
	${}_{\overline{2n}}h^{u}_{vw}$, ${}_{\overline{2n}}h^{v}_{wu}$, g_{xyz}	${}_{2n+1}D^{v/z}_{xy}$, ${}_{2n+1}D^{u/z}_{xy}$, ${}_{\overline{2n+1}}H^{z}_{uv}$
	concourantes en G_{uvw}.	*alignés* (sur ${}_{2n+1}i^{z/w}_{xy}$).

Reste à montrer que les deux points ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{z}_{uv}$, ${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{xy}_{zw}$, et l'un des deux points de Depaz, soit le point ${}_{2n+1}\mathrm{D}^{u|z}_{xy}$, sont alignés :

$${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{yu},\quad {}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{z}_{yu},\quad \mathrm{G}_{zwx}$$
$${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{y}_{xu},\quad {}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{z}_{xu},\quad \mathrm{G}_{zwy}$$

$$g_{xyu},\quad {}_{2n+2}h^{z}_{vw},\quad j_{zw}$$

concourantes en G_{zvw}.

$${}_{2n+2}h^{z}_{xw},\quad {}_{2n+2}h^{x}_{zw},\quad {}_{2n+1}q^{yu}_{zx}$$
$${}_{2n+2}h^{z}_{yw},\quad {}_{2n+2}h^{y}_{zw},\quad {}_{2n+1}q^{xu}_{yz}$$

$${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{z}_{uv},\quad {}_{2n+2}\mathrm{Q}^{xy}_{zw},\quad {}_{2n+1}\mathrm{D}^{u|z}_{xy}$$

alignés (sur ${}_{2n+1}i^{z|w}_{xy}$).

C. Q. F. D.

Les éléments irréguliers, unis chacun à quatre éléments déjà obtenus, appartiennent donc à la configuration. Chaque ensemble de rang donné supérieur ou inférieur d'éléments irréguliers contient 180 éléments.

Les centres irréguliers de rang fondamental ${}_{0}\mathrm{I}$ coïncident quatre par quatre avec les 45 points diagonaux ${}_{0}\mathrm{Q}$ (par exemple, ${}_{0}\mathrm{I}^{z|w}_{xy}$, point de concours des deux droites de Depaz de rang fondamental ${}_{0}d^{u|z}_{xy}$ et ${}_{0}d^{v|z}_{xy}$, lesquelles sont ici *les côtés* $d_{xy.zu.vw}$ et $d_{xy.zv.wu}$, de la latérale ${}_{1}q^{xy}_{zw}$ et de la pascale ${}_{\overline{0}}h^{z}_{uv}$, coïncide avec le point diagonal ${}_{0}\mathrm{Q}^{uv}_{zw}$).

Les axes irréguliers de premier rang inférieur coïncident trois par trois avec les pascales; les trois axes : ${}_{\overline{1}}i^{z|u}_{xy}$, ${}_{\overline{1}}i^{z|v}_{xy}$, ${}_{\overline{1}}i^{z|w}_{xy}$, unissant chacun l'un des trois kirkmanns ${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{vw}$, ${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{wu}$, ${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{uv}$, à l'un des trois points diagonaux ${}_{0}\mathrm{Q}^{zu}_{xy}$, ${}_{0}\mathrm{Q}^{zv}_{xy}$, ${}_{0}\mathrm{Q}^{zw}_{xy}$, coïncident avec la pascale ${}_{\overline{0}}h^{z}_{xy}$.

C'est à cette singularité qu'est due la propriété *particulière* aux points de Depaz *de premier rang* d'être trois par trois unis aux pascales.

Trois éléments de Depaz *de même rang* et respectivement affectés de l'un des trois cortèges d'indices : ${}^{z|u}_{xy}$, ${}^{z|v}_{xy}$, ${}^{z|w}_{xy}$, forment *un véritable triangle* (sauf le cas des points de premier rang).

Désignons par ${}_{2n+1}\mathrm{D}_{z.xy}$ le triangle des trois points

$${}_{2n+1}\mathrm{D}^{z|u}_{xy},\quad {}_{2n+1}\mathrm{D}^{z|v}_{xy},\quad {}_{2n+1}\mathrm{D}^{z|w}_{xy};$$

par ${}_{2n+1}\mathrm{D}_{xy.z}$ le triangle

$${}_{2n+1}\mathrm{D}^{u|z}_{xy},\quad {}_{2n+1}\mathrm{D}^{v|z}_{xy},\quad {}_{2n+1}\mathrm{D}^{w|z}_{xy};$$

et adoptons une notation analogue pour les éléments irréguliers.

Il résulte alors du Théorème XXV que :

Les triangles ${}_{2n+1}\mathrm{D}_{z.xy}$ *et* ${}_{\overline{2n+1}}i_{z.xy}$ *coïncident, de même que les triangles* ${}_{2n+1}\mathrm{D}_{xy.z}$ *et* ${}_{2n+1}i_{z.xy}$.

(Observation analogue pour droites de Depaz et centres irréguliers.)

9. Les éléments de Depaz déjà étudiés étant maintenant qualifiés d'*ordinaires*, tel le point ${}_{2n+1}D_{xy}^{z/u}$, intersection des axes irréguliers ${}_{2n+1}i_{xy}^{u/v}$ et ${}_{2n+1}i_{xy}^{u/w}$, appelons : point de Depaz *singulier*, et désignons par ${}_{2n+1}\Delta_{xy}^{u/z}$ le point commun aux axes irréguliers ${}_{2n+1}i_{xy}^{v/u}$ et ${}_{2n+1}i_{xy}^{w/u}$.

En rétablissant momentanément pour les éléments latéraux et les éléments ordinaires de Depaz les notations surlignées des rangs inférieurs, et observant que

$$_{\overline{2n+1}}q_{yu}^{zx} = {}_{2n+1}q_{zx}^{yu},$$

les deux points ordinaires de Depaz supérieur et inférieur : ${}_{2n+1}D_{xy}^{z/u}$ et ${}_{\overline{2n+1}}D_{xy}^{u/z}$, coïncident en un seul, commun aux quatre axes irréguliers :

$$_{2n+1}i_{xy}^{u/v},\quad {}_{2n+1}i_{xy}^{u/w},\quad {}_{\overline{2n+1}}i_{xy}^{z/v},\quad {}_{\overline{2n+1}}i_{xy}^{z/w}.$$

Il n'en est plus de même pour les éléments *singuliers* Δ; le point ${}_{2n+1}\Delta_{xy}^{z/u}$, commun aux axes irréguliers supérieurs ${}_{2n+1}i_{xy}^{v/z}$ et ${}_{2n+1}i_{xy}^{w/z}$, est *distinct* du point ${}_{\overline{2n+1}}\Delta_{xy}^{u/z}$, commun aux axes inférieurs ${}_{\overline{2n+1}}i_{xy}^{v/u}$ et ${}_{\overline{2n+1}}i_{xy}^{w/u}$, ces quatre axes *n'étant pas concourants*, puisque le premier et le dernier concourent au point ordinaire de Depaz ${}_{2n+1}D_{xy}^{w/v}$, tandis que le second et le troisième concourent au point ordinaire ${}_{2n+1}D_{xy}^{v/w}$.

Théorème XXVI. — *Tout comme les éléments ordinaires, les éléments singuliers de Depaz sont unis aux éléments de Bally.*

${}_{2n+2}h_{zu}^{y}$,	${}_{2n+2}h_{zu}^{x}$,	g_{xyv}	${}_{\overline{2n+1}}H_{yv}^{x}$,	${}_{\overline{2n+1}}H_{xv}^{y}$,	${}_{2n+2}Q_{zu}^{xy}$
${}_{\overline{2n+2}}h_{zu}^{y}$,	${}_{\overline{2n+2}}h_{zu}^{x}$,	${}_{\overline{2n+2}}h_{zu}^{w}$	${}_{2n+2}Q_{xw}^{zu}$,	${}_{2n+2}Q_{yw}^{zu}$,	${}_{2n+2}Q_{xy}^{zu}$
G_{yzu},	G_{xzu},	G_{wzu}	${}_{2n+1}i_{zu}^{x/w}$,	${}_{2n+1}i_{zu}^{y/w}$,	$b_{xy.zu}$
alignés sur j_{zu}.			*concourantes* (en ${}_{2n+1}\Delta_{zu}^{w/v}$).		

C. Q. F. D.

Les éléments *singuliers* de Depaz, unis chacun à deux éléments irréguliers et à un élément de Bally, appartiennent donc à la configuration.

10. Deux triangles d'éléments *d'une même texture* supérieure ou inférieure, relatifs aux deux triplets $W_{y(z)}^{x}$ et $W_{xy}^{(z)}$, *conjugalement homologues* et formés l'un *d'associés*, l'autre *d'isodiagonaux*, sont homologiques par un centre ou un axe d'ossature (*voir* schéma

Théorème XXVII); l'autre élément principal de leur homologie est *par définition* un *axe* ou un *centre de mixte conjugaison*.

L'axe d'homologie des triangles ${}_{2n+1}\mathrm{H}^{x}_{y(z)}$ et ${}_{2n+1}\mathrm{H}^{(z)}_{xy}$, et celui des triangles ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{y(z)}$ et ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{(z)}_{xy}$, seront respectivement désignés par ${}_{2n+1}m^{x}_{y/z}$ et ${}_{\overline{2n+1}}m^{x}_{y/z}$.

Le centre d'homologie des triangles ${}_{2n}h^{x}_{y(z)}$ et ${}_{2n}h^{(z)}_{xy}$, et celui des triangles ${}_{\overline{2n}}h^{x}_{y(z)}$ et ${}_{\overline{2n}}h^{(z)}_{xy}$, seront respectivement désignés par ${}_{2n}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$ et ${}_{\overline{2n}}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$.

Théorème XXVII. — *Les trois axes irréguliers supérieurs*

$$ {}_{2n+1}i^{x/y}_{vw}, \quad {}_{2n+1}i^{x/y}_{wu}, \quad {}_{2n+1}i^{x/y}_{uv} $$

concourent au centre de mixte conjugaison ${}_{2n+2}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$.

Les trois axes irréguliers inférieurs

$$ {}_{\overline{2n+1}}i^{x/y}_{vw}, \quad {}_{\overline{2n+1}}i^{x/y}_{wu}, \quad {}_{\overline{2n+1}}i^{x/y}_{uv} $$

concourent au centre de mixte conjugaison ${}_{\overline{2n}}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$.

Les trois centres irréguliers supérieurs

$$ {}_{2n}\mathrm{I}^{x/y}_{vw}, \quad {}_{2n}\mathrm{I}^{x/y}_{wu}, \quad {}_{2n}\mathrm{I}^{x/y}_{uv} $$

sont alignés sur l'axe de mixte conjugaison ${}_{2n+1}m^{x}_{y/z}$.

Les trois centres irréguliers inférieurs

$$ {}_{\overline{2n}}\mathrm{I}^{x/y}_{vw}, \quad {}_{\overline{2n}}\mathrm{I}^{x/y}_{wu}, \quad {}_{\overline{2n}}\mathrm{I}^{x/y}_{uv} $$

sont alignés sur l'axe de mixte conjugaison ${}_{\overline{2n-1}}m^{x}_{y/z}$.

La première de ces quatre propositions, par exemple, résulte de ce que les droites de jonction des sommets homologues des triangles ${}_{2n+2}h^{x}_{y(z)}$ et ${}_{2n+2}h^{(z)}_{xy}$ (qui concourent par définition au point ${}_{2n+2}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$) sont précisément, *en vertu du Théorème XXV*, et comme l'indique le schéma suivant, les axes irréguliers mentionnés :

${}_{2n+2}h^{x}_{y(z)}$ ${}_{2n+2}h^{(z)}_{xy}$	${}_{2n+2}h^{x}_{yu}$, ${}_{2n+2}h^{x}_{yv}$, ${}_{2n+2}h^{x}_{yw}$ ${}_{2n+2}h^{u}_{xy}$, ${}_{2n+2}h^{v}_{xy}$, ${}_{2n+2}h^{w}_{xy}$ ——— G_{xyu}, G_{xyv}, G_{xyw} *alignés sur* j_{xy}.	${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zu}$, ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zv}$, ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zw}$ ${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{vw}_{xy}$, ${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{wu}_{xy}$, ${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{uv}_{xy}$ ——— ${}_{2n+1}i^{x/y}_{vw}$, ${}_{2n+1}i^{x/y}_{wu}$, ${}_{2n+1}i^{x/y}_{uv}$ *concourants en* ${}_{2n+2}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$.

C. Q. F. D.

Les éléments de mixte conjugaison, éléments de jonction ou d'intersection de trois éléments irréguliers, appartiennent donc à la configuration. Chaque ensemble de rang donné contient 120 tels éléments.

Les *axes* de mixte conjugaison *de premier rang supérieur* coïncident deux par deux avec *les pascales*, et les *centres* de mixtes conjugaison *de rang fondamental* coïncident deux par deux avec *les kirkmanns*.

Théorème XXVIII. — *Les éléments de mixte conjugaison de chaque ensemble sont unis six par six soit aux points de Steiner, soit aux droites de Cayley-Salmon.*

${}_{2n+2}h^{x}_{wu}$, ${}_{2n+2}h^{x}_{wv}$, ${}_{2n+2}h^{x}_{wy}$	${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zu}$, ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zv}$, ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{zy}$
${}_{\overline{2n+2}}h^{x}_{wu}$, ${}_{\overline{2n+2}}h^{x}_{wv}$, ${}_{2n+2}h^{w}_{xy}$	${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{vw}_{xy}$, ${}_{2n+2}\mathrm{Q}^{wu}_{xy}$, ${}_{2n+3}\mathrm{H}^{x}_{yz}$
G_{xwu}, G_{xwv}, G_{xwy}	${}_{2n+1}i^{x/y}_{vw}$, ${}_{2n+1}i^{x/y}_{wu}$, g_{xyz}
alignés sur j_{xw}.	*concourantes en* ${}_{2n+2}\mathrm{M}^{x}_{y/z}$.

C.Q.F.D.

11\. Théorème XXIX. — *Les deux centres de mixte conjugaison* ${}_{2n}\mathrm{M}^{x}_{w/v}$ *et* ${}_{2n}\mathrm{M}^{y}_{w/v}$, *le centre irrégulier* ${}_{2n}\mathrm{I}^{w/v}_{xy}$ *et le point de texture* ${}_{2n-1}\mathrm{H}^{v}_{xy}$, *sont alignés.*

Les deux centres de mixte conjugaison ${}_{\overline{2n}}\mathrm{M}^{x}_{w/v}$ *et* ${}_{\overline{2n}}\mathrm{M}^{y}_{w/v}$, *le centre irrégulier* ${}_{\overline{2n}}\mathrm{I}^{w/v}_{xy}$ *et le point de texture* ${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{v}_{xy}$, *sont alignés.*

Les deux axes de mixte conjugaison ${}_{2n+1}m^{x}_{w/v}$ *et* ${}_{2n+1}m^{y}_{w/v}$, *l'axe irrégulier* ${}_{2n+1}i^{w/v}_{xy}$ *et la droite de texture* ${}_{2n}h^{v}_{xy}$, *sont concourants.*

Les deux axes de mixte conjugaison ${}_{\overline{2n+1}}m^{x}_{w/v}$ *et* ${}_{\overline{2n+1}}m^{y}_{w/v}$, *l'axe irrégulier* ${}_{\overline{2n+1}}i^{w/v}_{xy}$ *et la droite de texture* ${}_{\overline{2n+2}}h^{v}_{xy}$, *sont concourants.*

Soit, par exemple, la première de ces quatre propositions :

${}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{v}_{xy}$, J_{xv}, ${}_{2n+1}\mathrm{H}^{x}_{vw}$	g_{xvw}, ${}_{2n+1}q^{xy}_{vw}$, g_{xyv}
$\mathrm{B}_{xy.uv}$, ${}_{\overline{2n-1}}\mathrm{H}^{x}_{uv}$, ${}_{2n}\mathrm{Q}^{yz}_{xw}$	${}_{2n-1}i^{x/w}_{yz}$, ${}_{2n}d^{z/w}_{xy}$, ${}_{2n-1}q^{uv}_{xy}$
${}_{2n+1}q^{xy}_{uv}$, g_{xuv}, ${}_{\overline{2n}}h^{x}_{yz}$	${}_{2n}\mathrm{M}^{x}_{w/v}$, ${}_{2n}\mathrm{I}^{w/v}_{xy}$, ${}_{2n-1}\mathrm{H}^{v}_{xy}$
concourantes en ${}_{2n+1}\mathrm{H}^{x}_{uv}$.	*alignés.*

C. Q. F. D.

Les droites d'alignement et points de concours des quadruplets d'éléments mentionnés dans l'énoncé seront respectivement désignés par

$$ {}_{2n}f^{w/v}_{xy},\quad {}_{\overline{2n}}f^{w/v}_{xy},\quad {}_{2n+1}\mathrm{F}^{w/v}_{xy},\quad {}_{\overline{2n+1}}\mathrm{F}^{w/v}_{xy}. $$

Ce seront *les éléments transversaux* de la configuration, à laquelle ils appartiennent évidemment.

12. Il résulte du Théorème XXV que les trois éléments irréguliers de même rang arbitraire supérieur ou inférieur, et respectivement affectés de l'un des trois cortèges d'indices $^{z/w}_{xy}$, $^{z/x}_{yw}$, $^{z/y}_{wx}$, sont unis à un même élément de texture, de même rang absolu que ces éléments irréguliers, mais de classe opposée (c'est-à-dire inférieur, si ces éléments sont supérieurs, et inversement) et relatif à l'hexagone V^z_{uv}.

Si l'on considère trois éléments irréguliers *de même rang* respectivement affectés de l'un des trois cortèges d'indices $^{w/z}_{xy}$, $^{x/z}_{yw}$, $^{y/z}_{wx}$, on a le théorème suivant :

Théorème XXX. — *Les trois axes supérieurs*

$$_{2n+1}i^{w/z}_{xy},\quad _{2n+1}i^{x/z}_{yw},\quad _{2n+1}i^{y/z}_{wx}$$

sont concourants, de même que les trois axes inférieurs

$$_{\overline{2n+1}}i^{y/z}_{xy},\quad _{\overline{2n+1}}i^{x/z}_{yw},\quad _{\overline{2n+1}}i^{y/z}_{wx}.$$

Les trois centres supérieurs

$$_{2n}I^{w/z}_{xy},\quad _{2n}I^{x/z}_{yw},\quad _{2n}I^{y/z}_{wx}$$

sont alignés, de même que les trois centres inférieurs

$$_{\overline{2n}}I^{w/z}_{xy},\quad _{\overline{2n}}I^{x/z}_{yw},\quad _{\overline{2n}}I^{y/z}_{wx}.$$

Il suffit d'observer que les trois axes irréguliers supérieurs mentionnés, par exemple, sont (*par définition*) les trois axes d'homologie deux à deux des trois triangles :

$$_{2n+1}H^{(z)}_{wx},\quad _{2n+1}H^{(z)}_{yw},\quad _{2n+1}H^{(z)}_{xy},$$

lesquels sont deux à deux *homologiques par le même centre* G_{zuv}, les droites de jonction de leurs triples de sommets deux à deux homologues étant les deux droites de texture inférieure $_{\overline{2n}}h^u_{zv}$, $_{\overline{2n}}h^v_{zu}$, et la droite de Cayley-Salmon g_{wxy}. C. Q. F. D.

Les points de concours et droites d'alignement des éléments de l'énoncé seront univoquement rattachés à l'hexagone V^z_{uv}; ils seront désignés par les mêmes lettres spécifiques H ou h des éléments de

texture; leur *rang* sera représenté *par un couple de nombres*, formé du nombre o (zéro) et du *rang* (supérieur ou inférieur) des éléments irréguliers dont ils dérivent.

Les quatre éléments obtenus par le Théorème XXX seront donc respectivement désignés par

$${}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{z}_{uv},\quad {}_{0;\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{z}_{uv},\quad {}_{0;2n}h^{z}_{uv},\quad {}_{0;\overline{2n}}h^{z}_{uv}.$$

Les divers ensembles de ces éléments s'appelleront : *les textures spéciales fondamentales de la configuration*. Ces éléments appartiennent évidemment à la configuration, comme éléments d'union de trois éléments (irréguliers) de la configuration.

Théorème XXXI. — *Les textures spéciales fondamentales ont même ossature que les textures ordinaires.*

Il faut établir, par exemple, que les trois droites : ${}_{2n+1}i^{w/z}_{xy}$, ${}_{2n+1}i^{x/z}_{yw}$, g_{zuv}, sont concourantes (le point de concours des deux premières étant ${}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{z}_{uv}$).

$$\begin{array}{ccc|ccc}
{}_{\overline{2n+2}}h^{x}_{yw}, & {}_{\overline{2n+2}}h^{w}_{xy}, & {}_{2n+2}d^{y/z}_{xw} & {}_{2n+2}\mathrm{Q}^{xy}_{zw}, & {}_{2n+2}\mathrm{Q}^{yw}_{zx}, & \mathrm{G}_{wxy} \\
g_{xuv}, & g_{wuv}, & {}_{2n+1}q^{uv}_{xw} & {}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{w}_{uv}, & {}_{\overline{2n+1}}\mathrm{H}^{x}_{uv}, & \mathrm{J}_{uv} \\
\hline
{}_{2n+3}\mathrm{H}^{x}_{uv}, & {}_{2n+3}\mathrm{H}^{w}_{uv}, & \mathrm{B}_{xw.uv} & {}_{2n+1}i^{w/z}_{xy}, & {}_{2n+1}i^{x/z}_{yw}, & g_{zuv} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } {}_{2n+3}q^{xw}_{uv}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes.}}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Théorème XXXII. — *A chaque texture spéciale fondamentale est unie une nouvelle texture, qui admet pour ossature l'ossature fondamentale* (de Steiner ou de Cayley-Salmon) *complémentaire de celle de la texture spéciale envisagée.*

Il suffit de montrer, par exemple, que deux quelconques des trois points

$${}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{w}_{uv},\quad {}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{w}_{zu},\quad {}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{w}_{vz}$$

sont alignés avec le point de Steiner G_{wxy}.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
{}_{2n+2}\mathrm{Q}^{xy}_{vw}, & {}_{2n+2}\mathrm{Q}^{xy}_{zw}, & {}_{2n+1}\Delta^{w/u}_{xy} & {}_{2n+1}i^{z/w}_{xy}, & {}_{2n+1}i^{v/w}_{xy}, & {}_{\overline{2n+2}}h^{w}_{xy} \\
\mathrm{J}_{zu}, & \mathrm{J}_{vu}, & \mathrm{J}_{wu} & g_{uvw}, & g_{wzu}, & g_{zuv} \\
\hline
b_{xy.vw}, & b_{xy.wz}, & b_{xy.zv} & {}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{w}_{uv}, & {}_{0;2n+1}\mathrm{H}^{w}_{zu}, & \mathrm{G}_{wxy} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{concourantes en } \mathrm{K}^{u}_{xy}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{alignés.}}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

La droite d'alignement des trois points

$$ {}_{0;2n+1}H^{w}_{uv}, \quad {}_{0;2n+1}H^{w}_{zu}, \quad {}_{0,2n+1}H^{w}_{vz}, $$

et celle des trois points

$$ {}_{0;\overline{2n+1}}H^{w}_{uv}, \quad {}_{0;\overline{2n+1}}H^{w}_{zu}, \quad {}_{0;\overline{2n+1}}H^{w}_{vz}, $$

droites unies au point de Steiner G_{wxy}, seront respectivement désignées par

$$ {}_{1';2n+1}h^{w}_{xy} \quad \text{et} \quad {}_{1';\overline{2n+1}}h^{w}_{xy}. $$

Le point de concours des trois droites

$$ {}_{0;2n}h^{w}_{uv}, \quad {}_{0;2n}h^{w}_{zu}, \quad {}_{0;2n}h^{w}_{vz}, $$

et celui des trois droites

$$ {}_{0;\overline{2n}}h^{w}_{uv}, \quad {}_{0;\overline{2n}}h^{w}_{zu}, \quad {}_{0;\overline{2n}}h^{w}_{vz}, $$

points unis à la droite de Cayley-Salmon g_{wxy}, seront respectivement désignés par

$$ {}_{1';2n}H^{w}_{xy} \quad \text{et} \quad {}_{1';\overline{2n}}H^{w}_{xy}. $$

La notation adoptée pour l'indice numérique voisin de la lettre spécifique est la notation pp', et celle adoptée pour l'indice numérique précédant le point-virgule est la notation ru (*voir* n° 5).

L'ensemble de chaque texture spéciale fondamentale et de la texture qui lui est unie se divise, tout comme l'ensemble de deux textures *ordinaires* unies, en six figures polaires.

Les éléments *latéraux*

$$ {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zu}, \quad {}_{0;\overline{2n+1}}q^{xy}_{zu}, \quad {}_{0;2n}Q^{xy}_{zu}, \quad {}_{0;\overline{2n}}Q^{xy}_{zu}, $$
$$ {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zu}, \quad {}_{1';\overline{2n+1}}Q^{xy}_{zu}, \quad {}_{1';2n}q^{xy}_{zu}, \quad {}_{1';\overline{2n}}q^{xy}_{zu} $$

seront respectivement définis comme éléments d'union des paires d'éléments

$$ ({}_{0;2n+1}H^{x}_{zu} \text{ et } {}_{0;2n+1}H^{y}_{zu}), \quad ({}_{0;\overline{2n+1}}H^{x}_{zu} \text{ et } {}_{0;\overline{2n+1}}H^{y}_{zu}), $$
$$ ({}_{0;2n}h^{x}_{zu} \text{ et } {}_{0;2n}h^{y}_{zu}), \quad ({}_{0;\overline{2n}}h^{x}_{zu} \text{ et } {}_{0;\overline{2n}}h^{y}_{zu}), $$
$$ ({}_{1';2n+1}h^{x}_{zu} \text{ et } {}_{1';2n+1}h^{y}_{zu}), \quad ({}_{1';\overline{2n+1}}h^{x}_{zu} \text{ et } {}_{1';\overline{2n+1}}h^{y}_{zu}), $$
$$ ({}_{1';2n}H^{x}_{zu} \text{ et } {}_{1';2n}H^{y}_{zu}), \quad ({}_{1';\overline{2n}}H^{x}_{zu} \text{ et } {}_{1';\overline{2n}}H^{y}_{zu}). $$

Théorème XXXIII. — *Chaque texture spéciale fondamentale est latéralement reliée à une nouvelle texture qui a même ossature que la première.*

Chaque texture unie à une texture spéciale fondamentale est aussi latéralement reliée a une nouvelle texture de même ossature.

Il faut établir, par exemple, que les trois latérales

$$ {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zu}, \quad {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zv}, \quad {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zw} $$

sont concourantes *en un point uni à la droite de Cayley-Salmon* g_{xyz}; et que les trois latéraux

$$ {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zu}, \quad {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zv}, \quad {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zw} $$

sont alignés *sur une droite unie au point de Steiner* G_{xyz}.

Il suffit de montrer que deux quelconques des trois éléments latéraux envisagés sont concourants (ou alignés) avec l'élément d'ossature mentionné, comme il résulte des deux schémas suivants (1° et 2°) :

1°

$$ \begin{array}{ccc|ccc} g_{zxv}, & g_{zxu}, & {}_{1';2n+1}h^{x}_{yw} & {}_{0;2n+1}H^{x}_{zu}, & {}_{0;2n+1}H^{x}_{zv}, & J_{zx} \\ g_{zyv}, & g_{zyu}, & {}_{1';2n+1}h^{y}_{xw} & {}_{0;2n+1}H^{y}_{zu}, & {}_{0;2n+1}H^{y}_{zv}, & J_{zy} \\ \hline J_{zv}, & J_{zu}, & G_{xyw} & {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zu}, & {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zv}, & g_{xyz} \end{array} $$

alignés sur g_{zuv}. | *concourantes.*

C. Q. F. D.

2°

$$ \begin{array}{ccc|ccc} G_{zxv}, & G_{zxu}, & {}_{0;2n+1}H^{x}_{yw} & {}_{1';2n+1}h^{x}_{zu}, & {}_{1';2n+1}h^{x}_{zv}, & j_{zx} \\ G_{zyv}, & G_{zyu}, & {}_{0;2n+1}H^{y}_{xw} & {}_{1';2n+1}h^{y}_{zu}, & {}_{1';2n+1}h^{y}_{zv}, & j_{zy} \\ \hline j_{zv}, & j_{zu}, & g_{xyw} & {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zu}, & {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zv}, & G_{xyz} \end{array} $$

concourantes en G_{zuv}. | *alignés.*

C. Q. F. D.

Le point de concours des trois droites

$$ {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zu}, \quad {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zv}, \quad {}_{0;2n+1}q^{xy}_{zw}, $$

point uni à la droite de Cayley-Salmon g_{xyz}, sera désigné par ${}_{1'';2n+1}H^{z}_{xy}$.

La droite d'alignement des trois points

$$ {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zu}, \quad {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zv}, \quad {}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zw}, $$

droite unie au point de Steiner G_{xyz}, sera désignée par ${}_{2';2n+1}h^{z}_{xy}$.

Les éléments latéraux précédents sont unis aux éléments de Bally, et l'élément d'union de deux de ces éléments latéraux *contigus*, assimilable à un élément ordinaire de Depaz, est aussi uni à un élément

de Bally, comme le montrent les quatre schémas suivants (3°, 4°, 5°, 6°) :

3°	${}_{\overline{2n+1}}H^{x}_{zu}$, ${}_{\overline{2n+1}}H^{y}_{zu}$, ${}_{2n+2}Q^{vw}_{xy}$	${}_{2n+1}i^{y/x}_{vw}$, ${}_{2n+1}i^{x/y}_{vw}$, ${}_{2n+1}q^{zu}_{xy}$
	G_{xvw}, G_{yvw}, J_{zu}	g_{xzu}, g_{yzu}, j_{vw}
	———	———
	${}_{2n+2}h^{x}_{vw}$, ${}_{2n+2}h^{y}_{vw}$, $b_{xy.vw}$	${}_{0;2n+1}H^{x}_{zu}$, ${}_{0;2n+1}H^{y}_{zu}$, $B_{xy.zu}$
	concourantes en ${}_{2n+2}Q^{xy}_{vw}$.	*alignés* (sur ${}_{0;2n+1}q^{xy}_{zu}$).
4°	${}_{2n+1}i^{x/y}_{zu}$, ${}_{2n+1}i^{y/x}_{zu}$, ${}_{0;2n+1}q^{xy}_{vw}$	${}_{0;2n+1}H^{x}_{vw}$, ${}_{0;2n+1}H^{y}_{vw}$, ${}_{2n+2}Q^{zu}_{xy}$
	g_{xvw}, g_{yvw}, j_{zu}	G_{xzu}, G_{yzu}, J_{vw}
	———	———
	${}_{\overline{2n+1}}H^{x}_{vw}$, ${}_{\overline{2n+1}}H^{y}_{vw}$, $B_{xy.vw}$	${}_{1';2n+1}h^{x}_{zu}$, ${}_{1';2n+1}h^{y}_{zu}$, $b_{xy.zu}$
	alignés sur ${}_{2n+1}q^{vw}_{xy}$.	*concourantes en* ${}_{1';2n+1}Q^{xy}_{zu}$.
5°	g_{xyz}, g_{xyu}, ${}_{1';2n+1}h^{x}_{vw}$	${}_{0;2n+1}H^{x}_{yu}$, ${}_{0;2n+1}H^{x}_{yz}$, J_{xy}
	${}_{1}q^{xu}_{yz}$, ${}_{1}q^{xz}_{yu}$, j_{vw}	$B_{xz.yu}$, $B_{xu.yz}$, ${}_{1}D^{x/y}_{zu}$
	———	———
	${}_{1}H^{x}_{yz}$, ${}_{1}H^{x}_{yu}$, G_{xvw}	${}_{0;2n+1}q^{xz}_{yu}$, ${}_{0;2n+1}q^{xu}_{yz}$, $b_{zu.vw}$
	alignés sur ${}_{0}h^{x}_{vw}$.	*concourantes* (en ${}_{0;2n+1}D^{x/y}_{zu}$).
6°	G_{xyz}, G_{xyu}, ${}_{0;2n+1}H^{x}_{vw}$	${}_{1';2n+1}h^{x}_{yu}$, ${}_{1';2n+1}h^{x}_{yz}$, J_{xy}
	${}_{0}Q^{xu}_{yz}$, ${}_{0}Q^{xz}_{yu}$, J_{vw}	$b_{xz.yu}$, $b_{xu.yz}$, $d_{xy.zu.vw}$
	———	———
	${}_{0}h^{x}_{yz}$, ${}_{0}h^{x}_{yu}$, g_{xvw}	${}_{1';2n+1}Q^{xz}_{yu}$, ${}_{1';2n+1}Q^{xu}_{yz}$, $B_{zu.vw}$
	concourantes en ${}_{1}H^{x}_{vw}$.	*alignés* (sur ${}_{1';2n+1}d^{x/y}_{zu}$).

Ces propriétés suffisent pour assurer l'application alternative indéfinie, aux textures spéciales fondamentales, des opérations R et U, la première opération appliquée étant soit R, soit U.

Il suffit de répéter les théorèmes établis pour les textures ordinaires (en tenant compte, pour l'établissement des schémas, de la différence des notations, celle adoptée pour l'indice voisin de la lettre spécifique étant pp', et pour le premier indice, ru).

A partir de la texture spéciale fondamentale ${}_{0;2n+1}H$, par exemple, la $k^{\text{ième}}$ texture obtenue par l'application alternative des opérations R et U, *l'opération* U *étant appliquée la première*, sera caractérisée par le cortège antérieur k'; $2n+1$, où le nombre k est affecté *d'un simple accent*. Cette texture sera réglée et aura pour lettre spécifique h, si k est de la forme $4p+1$ ou $4p+2$; elle sera ponctuelle et aura pour lettre spécifique H, si k est de la forme $4p$ ou $4p-1$.

A partir de la même texture spéciale fondamentale ${}_{0;2n+1}H$, la $k^{\text{ième}}$ texture obtenue par application alternative des opérations R et U, *l'opération* R *étant appliquée la première*, sera caractérisée par le cortège antérieur k''; $2n+1$, où le nombre k est affecté *d'un*

double accent. Elle sera ponctuelle et aura pour lettre spécifique H, si k est de la forme $4p$ ou $4p+1$; elle sera réglée et aura pour lettre spécifique h, si k est de la forme $4p-1$ ou $4p+2$.

Chaque texture spéciale fondamentale définit donc, comme la texture des pascales, une infinité de textures, d'ensembles de latéraux, d'ensembles d'éléments de Depaz, d'ensembles d'éléments irréguliers, etc.

De l'un de ces *nouveaux* ensembles d'éléments irréguliers, on déduira une *nouvelle* texture spéciale fondamentale, et de cette dernière, une *nouvelle* série de textures et d'ensembles divers, etc.

L'expression la plus générale d'un élément obtenu est formée de la lettre spécifique de cet élément (h, H, q, Q, d, D, δ, Δ, i, I, m, M, f, F), suivie de son cortège d'indices littéraux et précédée d'un cortège d'indices numériques

$$k;\ r;\ \ldots;\ s;\ t;\ n,$$

où chaque lettre, *sauf la dernière*, représente un entier *affecté soit d'un simple, soit d'un double accent* (notation ru), la dernière, n, représentant un entier *surligné ou non* (notation pp').

Tout élément h, H, m, M est uni à un point de Steiner ou à une droite de Cayley-Salmon, et tout élément q, Q, d, D, δ, Δ est uni à un élément de Bally.

13. Les textures spéciales fondamentales déduites des éléments irréguliers : *de rang fondamental*, *de premier rang inférieur*, *de premier rang supérieur*, *de second et de troisième rangs inférieurs*, présentent certaines singularités, dues à la propriété de la texture des pascales d'être latéralement reliée à elle-même.

1° Les trois centres irréguliers de rang fondamental ${}_0\mathrm{I}_{xy}^{z/w}$, ${}_0\mathrm{I}_{zx}^{y/w}$, ${}_0\mathrm{I}_{yz}^{x/w}$ coïncidant (7) avec les trois points diagonaux $\mathrm{Q}_{zw.uv}$, $\mathrm{Q}_{yw.uv}$, $\mathrm{Q}_{xw.uv}$, la droite de texture spéciale fondamentale ${}_{0;0}h_{uv}^{w}$, droite de jonction de ces trois centres irréguliers, n'est autre que *la pascale* ${}_0h_{uv}^{w}$, et les divers ensembles déduits de cette texture spéciale fondamentale ne sont autres que les ensembles ordinaires déduits de la texture des pascales.

2° Les trois axes irréguliers de premier rang inférieur ${}_{\bar{1}}i_{xy}^{z/w}$ ${}_{\bar{1}}i_{xz}^{y/w}$, ${}_{\bar{1}}i_{yz}^{x/w}$, coïncidant respectivement (7) avec les trois pascales ${}_0h_{xy}^{z}$, ${}_0h_{zx}^{y}$, ${}_0h_{yz}^{x}$, le point de texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{1}}\mathrm{H}_{uv}^{w}$, point de

concours de ces trois droites, coïncide, de même que les deux autres points ${}_{0;\bar{1}}\mathrm{H}^{v}_{wu}$ et ${}_{0;\bar{1}}\mathrm{H}^{u}_{vw}$, *avec le point de Steiner* G_{xyz}, et la texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{1}}\mathrm{H}$ se réduit à la configuration G de Steiner. Celle-ci est *latéralement reliée à elle-même* et la texture qui lui est *unie* se réduit à la configuration j des axes de Steiner-Plücker.

3° La texture spéciale fondamentale ${}_{0;1}\mathrm{H}$ relative aux axes irréguliers de premier rang supérieur ${}_{1}i$, coïncide avec la texture des kirkmanns, *chaque axe* ${}_{0}i^{x/w}_{yz}$ *étant uni*, comme on va le montrer, *au kirkmann* ${}_{1}\mathrm{H}^{w}_{uv}$.

Il suffit de prouver que les trois points ${}_{2}\mathrm{Q}^{yz}_{xw}$, ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{uv}$, ${}_{1}\mathrm{H}^{w}_{uv}$ sont alignés, la droite de jonction des deux premiers étant l'axe irrégulier ${}_{1}i^{x/w}_{yz}$.

$\mathrm{Q}_{wz.yx}$,	G_{xwy},	${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{y}_{uv}$		${}_{2}h^{y}_{xw}$,	${}_{1}q^{uv}_{yx}$,	${}_{0}h^{w}_{yx}$
$\mathrm{Q}_{wy.zx}$,	G_{xwz},	${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{z}_{uv}$		${}_{2}h^{z}_{xw}$,	${}_{1}q^{uv}_{zx}$,	${}_{0}h^{w}_{zx}$
$d_{wx.yz.uv}$,	j_{wx},	${}_{1}q^{uv}_{yz}$		${}_{2}\mathrm{Q}^{yz}_{xw}$,	${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{x}_{uv}$,	${}_{1}\mathrm{H}^{w}_{uv}$
concourantes en $\mathrm{B}_{uv.yz}$.				*alignés.*		

Les ensembles déduits de cette texture spéciale fondamentale coïncident donc, aux notations numériques près, avec les ensembles ordinaires déduits de la texture des pascales.

4° La texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{2}}h$, déduite de l'ensemble irrégulier inférieur ${}_{\bar{2}}\mathrm{I}$, et la texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{3}}\mathrm{H}$, déduite de l'ensemble irrégulier inférieur ${}_{\bar{3}}i$, *sont unies*.

Nous devons montrer que ${}_{0;\bar{2}}h^{z}_{uv}$, droite de jonction de ${}_{\bar{2}}\mathrm{I}^{w/z}_{xy}$ et de G_{zuv}, est unie à ${}_{0;\bar{3}}\mathrm{H}^{z}_{xy}$, point de concours de ${}_{\bar{3}}i^{w/z}_{uv}$ et de g_{xyz}; c'est-à-dire que les trois droites ${}_{0;\bar{2}}h^{z}_{uv}$, ${}_{\bar{3}}i^{w/z}_{uv}$, g_{xyz} sont concourantes.

${}_{\bar{2}}\mathrm{I}^{w/z}_{xy}$,	${}_{1}\mathrm{H}^{z}_{xy}$,	${}_{2}\mathrm{Q}^{wz}_{uv}$		$({}_{2}\mathrm{Q}^{wz}_{uv}, {}_{1}\mathrm{H}^{z}_{xy})$,	${}_{2}h^{w}_{uv}$,	${}_{1}q^{wz}_{xy}$
G_{zuv},	G_{wuv},	${}_{3}\mathrm{H}^{w}_{xy}$		${}_{\bar{2}}h^{w}_{uv}$,	g_{wxy};	j_{uv}
${}_{0;\bar{2}}h^{z}_{uv}$,	g_{xyz},	${}_{\bar{3}}i^{w/z}_{uv}$			${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{w}_{xy}$,	$\mathrm{B}_{xy.wz}$
				alignés sur ${}_{1}q^{xy}_{wz}$.		

La droite de jonction des deux derniers points ${}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{w}_{xy}$ et $\mathrm{B}_{xy.wz}$ du second tableau étant ${}_{1}q^{xy}_{wz}$, pour établir l'homologie des deux triangles du schéma, d'où résulte la propriété énoncée, il faut prouver que les trois droites $({}_{2}\mathrm{Q}^{wz}_{uv}, {}_{1}\mathrm{H}^{z}_{xy})$, ${}_{\bar{2}}h^{w}_{uv}$, ${}_{1}q^{xy}_{wz}$ sont concourantes. Désignons

la première, pour abréger, par la lettre p.

$\begin{array}{ccc} {}_1i^{z\mid w}_{uv}, & {}_2h^{z}_{uv}, & b_{uv.wz} \\ {}_0h^{w}_{uv}, & {}_0h^{z}_{uv}, & g_{xyz} \\ \hline {}_1\mathrm{H}^{w}_{xy}, & \mathrm{G}_{zuv}, & \mathrm{J}_{xy} \end{array}$ *alignés sur* $g_{w.xy}$.	$\begin{array}{ccc} {}_2\mathrm{Q}^{wz}_{uv}, & {}_2\mathrm{Q}^{uv}_{wz}, & {}_{\bar{1}}\mathrm{H}^{z}_{xy} \\ {}_1\mathrm{H}^{z}_{xy}, & \mathrm{G}_{wuv}, & \mathrm{Q}_{wz.uv} \\ \hline p, & {}_{\bar{2}}h^{w}_{uv}, & {}_1q^{xy}_{wz} \end{array}$ *concourantes.*

C. Q. F. D.

Les divers ensembles déduits de la texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{2}}h$ coïncident, aux notations numériques près, avec les divers ensembles déduits de la texture spéciale fondamentale ${}_{0;\bar{3}}\mathrm{H}$.

Les singularités mentionnées sont les seules qui paraissent se présenter, comme il semble résulter de nos tableaux numériques.

14. Nous allons maintenant déduire de l'ensemble *des droites de Bally* une texture ponctuelle *latéralement reliée à elle-même* (comme l'est la texture réglée des pascales), et qui sera dite (bien improprement d'ailleurs) *la texture corrélative* de rang fondamental de la configuration. Elle engendrera un ensemble d'éléments analogues à ceux déduits de la texture des pascales.

Les trois points de Bally, $\mathrm{B}_{xy.zu}$, $\mathrm{B}_{zu.vw}$, $\mathrm{B}_{vw.xy}$, sont alignés sur le côté $d_{xy.zu.vw}$. De même, comme on va le voir, les trois droites de Bally : $b_{xy.zu}$, $b_{zu.vw}$, $b_{vw.xy}$, sont concourantes; leur point de concours sera désigné par $\mathrm{D}'_{xy\cdot zu\cdot vw}$.

$\begin{array}{ccc} {}_0h^{y}_{vw}, & {}_0h^{w}_{xy}, & {}_1q^{wy}_{vx} \\ {}_1q^{yu}_{zx}, & {}_0h^{u}_{xy}, & {}_0h^{y}_{zu} \\ \hline {}_1\mathrm{H}^{y}_{zx}, & {}_0\mathrm{Q}^{wu}_{xy}, & {}_1\mathrm{H}^{y}_{vx} \end{array}$ *alignés sur* ${}_0h^{y}_{wu}$.	$\begin{array}{ccc} {}_1\mathrm{D}^{w\mid v}_{xy}, & {}_1\mathrm{D}^{y\mid x}_{vw}, & \mathrm{Q}_{xy.vw} \\ \mathrm{Q}_{xy.zu}, & {}_1\mathrm{D}^{y\mid x}_{zu}, & {}_1\mathrm{D}^{u\mid z}_{xy} \\ \hline b_{xy.zu}, & b_{zu.vw}, & b_{vw.xy} \end{array}$ *concourantes* (en $\mathrm{D}'_{xy.zu.vw}$).

C. Q. F. D.

Il y a 15 points D', correspondant aux 15 côtés d et jouissant de propriétés corrélativement similaires; *les* 15 *points* D' *ne sont pas toutefois les sommets d'un même hexalatère*, comme les droites d sont les côtés d'un même hexangle.

Le point de concours $\mathrm{Q}_{xy.zu}$ des deux côtés $d_{xz.yu.vw}$ et $d_{xu.yz.vw}$ est uni (par définition) à la droite de Bally $b_{xy.zu}$. De même, les deux points $\mathrm{D}'_{xz\cdot yu\cdot vw}$ et $\mathrm{D}'_{xu\cdot zy\cdot vw}$ sont alignés avec le point de Bally $\mathrm{B}_{xy.zu}$; leur droite d'alignement sera désignée par l'une des expres-

sions $q'_{xy.zu}$, ${}_0q'^{xy}_{zu}$, ${}_0q'^{zu}_{xy}$.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
Q_{xu.yz}, & Q_{xz.yu}, & J_{vw} & b_{xz.yu}, & b_{xu.yz}, & d_{xy.zu.vw} \\
{}_1D^{u/x}_{yz}, & {}_1D^{z/x}_{yu}, & K^{x}_{vw} & b_{vw.yu}, & b_{vw.yz}, & {}_1q^{zu}_{xy} \\
\hline
{}_0h^{u}_{yz}, & {}_0h^{z}_{yu}, & g_{xvw} & D'_{xz.yu.vw}, & D'_{xu.yz.vw}, & B_{xy.zu} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{concourantes en } G_{yzu}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{alignés } (\text{sur } q'_{xy.zu}).}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Les droites q', ou *latérales corrélatives fondamentales*, au nombre de 45, joueront un rôle analogue à celui des latéraux fondamentaux ou points diagonaux Q. (Les points D′, points de concours de trois droites de Bally, et les droites q', droites d'alignement de deux points D′ et d'un point de Bally, appartiennent à la configuration ; il en sera de même des ensembles qui en seront déduits.)

Revenant sur un sujet précédent, nous avons dit sans y insister (Chapitre XIII, 6) que les fausses pascales des hexagones d'un même sous-système de Kirkmann ne sont pas concourantes.

Autrement dit, le point de concours des fausses pascales k^{x}_{uv} et k^{x}_{uw} *n'est pas uni à la fausse pascale* k^{x}_{vw} ; nous allons montrer qu'il est *uni à la pascale* ${}_0h^{u}_{vw}$. Ce point de concours, qui sera donc *un point de la configuration*, sera désigné par $A^{x/u}_{vw}$.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
d_{uw.vz..xy}, & d_{uv.wz..xy}, & j_{xy} & B_{uv.wz}, & B_{uw.vz}, & Q_{zu.vw} \\
d_{uw.yv.zx}, & d_{uv.yw.zx}, & j_{zx} & B_{uv.yw}, & B_{uw.yv}, & Q_{yu.vw} \\
\hline
Q_{yz.xv}, & Q_{yz..xw}, & G_{xyz} & k^{x}_{uv}, & k^{x}_{uw}, & {}_0h^{u}_{vw} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } {}_0h^{x}_{yz}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes } (\text{en } A^{x/u}_{vw}).}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Désignons de même par $a^{x/u}_{vw}$ la droite de jonction des deux faux kirkmanns K^{x}_{uv} et K^{x}_{uw}. Tout comme les trois points $A^{x/u}_{vw}$, $A^{y/u}_{vw}$, et $A^{z/u}_{vw}$ sont alignés sur une droite *unie au point de Steiner* G_{uvw} (pascale h^{u}_{vw}), les trois droites $a^{x/u}_{vw}$, $a^{y/u}_{vw}$, $a^{z/u}_{vw}$ *seront concourantes en un point uni à la droite de Cayley-Salmon* g_{uvw}, point qui sera désigné par H'^{u}_{vw}.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
g_{yuv}, & g_{xuv}, & b_{uv.zw} & K^{x}_{uv}, & K^{y}_{uv}, & J_{uv} \\
g_{yuw}, & g_{xuw}, & b_{uw.zv} & K^{x}_{uw}, & K^{y}_{uw}, & J_{uw} \\
\hline
J_{yu}, & J_{xu}, & J_{xy} & a^{x/u}_{vw}, & a^{y/u}_{vw}, & g_{uvw} \\
\multicolumn{3}{c|}{\textit{alignés sur } g_{xyu}.} & \multicolumn{3}{c}{\textit{concourantes } (\text{en } H'^{u}_{vw}).}
\end{array}$$

C. Q. F. D.

Montrons maintenant que le point H'^{u}_{vw} est aussi le point de concours des trois latérales corrélatives fondamentales $q'_{vw.ux}$, $q'_{vw.uy}$, $q'_{vw.uz}$.

Il suffit pour cela d'établir que les trois droites $a^{x|u}_{vw}$, g_{uvw}, $q'_{xu.vw}$ sont concourantes :

$b_{xw.yz}$,	$b_{uv.yz}$,	g_{xuv}	K^{x}_{uv},	J_{uv},	$D'_{uv.xw.yz}$
$b_{xv.yz}$,	$b_{uw.yz}$,	g_{xuw}	K^{x}_{uw},	J_{uw},	$D'_{uw.xv.yz}$
K^{u}_{yz},	K^{x}_{yz},	J_{xu}	$a^{x\|u}_{vw}$,	g_{uvw},	$q'_{xu.vw}$
alignés sur $b_{yz.vw}$.			*concourantes* (en H'^{u}_{vw}).		

C. Q. F. D.

Les 45 *droites* q' *sont donc les latérales fondamentales d'une texture fondamentale ponctuelle* H' *ou* ${}_0H'$, *latéralement reliée à elle-même et ayant pour ossature la configuration des droites de Cayley-Salmon.*

Cette texture est unie à une texture réglée ${}_1h'$, ayant pour ossature la configuration des points de Steiner. Il suffit de montrer que deux quelconques des trois points ${}_0H'^{x}_{uv}$, ${}_0H'^{x}_{uw}$, ${}_0H'^{x}_{vw}$ sont alignés avec le point de Steiner G_{xyz} (sur une droite qui sera désignée par ${}_1h'^{x}_{yz}$) :

$B_{xv.uw}$,	$B_{xw.uv}$,	$D'_{xu.vw.yz}$	$q'_{xw.uv}$,	$q'_{xv.uw}$,	j_{yz}
${}_1H^{x}_{uw}$,	${}_1H^{x}_{uv}$,	J_{xu}	g_{xuv},	g_{xuw},	${}_0h^{x}_{yz}$
${}_1q^{xv}_{uw}$,	${}_1q^{xw}_{uv}$,	$b_{vw.yz}$	H'^{x}_{uv},	H'^{x}_{uw},	G_{xyz}
concourantes en ${}_1D^{x\|u}_{vw}$.			*alignés* (sur ${}_1h'^{x}_{yz}$).		

C. Q. F. D.

Toutes les propriétés établies pour la texture des pascales et celles qui s'en déduisent s'appliquent à la texture ${}_0H'$ et à celles qui s'en déduisent; cette identité s'étend jusqu'aux propriétés *spéciales* aux ensembles des premiers rangs déduits des pascales : telle la propriété des premières latérales d'être unies aux latéraux fondamentaux, ou la propriété des points de Depaz de premier rang d'être unis aux pascales. *Tous les théorèmes établis au Chapitre XIII peuvent, en effet, être répétés.*

15. Observation I. — Résumons ici, en y ajoutant un ou deux points, les principaux caractères de la configuration des pascales.

L'ensemble des 60 pascales se divise en six figures polaires : x, y, z, u, v, w, dont les sommets sont les 60 kirkmanns.

Deux quelconques de ces six figures, soit x et y, peuvent se décomposer chacune en un quadrangle et un quadrilatère *réciproques dans cette figure*, soit (H_y^x, h_y^x) et (H_x^y, h_x^y), de telle sorte que les deux quadrangles (H_y^x, H_x^y), ainsi que les deux quadrilatères (h_y^x, h_x^y), *soient raccordables*.

Il y a un troisième quadrangle H_{xy} de kirkmanns dont les sommets appartiennent respectivement à chacune des quatre autres figures polaires z, u, v, w, et un troisième quadrilatère h_{xy} de pascales dont les côtés appartiennent aussi respectivement à chacune de ces quatre autres figures et y sont respectivement réciproques des sommets du précédent quadrangle, tels que ce quadrangle soit simultanément raccordable avec chacun des deux premiers et que ce quadrilatère soit simultanément raccordable avec chacun des deux premiers.

L'axe de raccordement commun des trois quadrilatères deux à deux raccordables (h_y^x, h_x^y, h_{xy}) est l'axe de Steiner-Plücker j_{xy} ; il correspond univoquement au trilatère T_{xy}, qui est à la fois *membre diagonal commun* aux quatre hexagones admettant pour pascales les côtés du troisième quadrilatère et pour kirkmanns les sommets du troisième quadrangle, et *membre de structure commun* aux huit hexagones admettant pour pascales les côtés des deux premiers quadrilatères et pour kirkmanns les sommets des deux premiers quadrangles. Les quatre points de concours des quatre triples de côtés homologues de ces quadrilatères sont les points de Steiner unis à cet axe de Steiner-Plücker.

Le centre de raccordement commun des trois quadrangles deux à deux raccordables (H_y^x, H_x^y, H_{xy}), correspondant univoquement au même trilatère T_{xy}, est le centre de Salmon J_{xy}. Les quatre droites de jonction des quatre triples de sommets homologues de ces quadrangles sont les quatre droites de Cayley-Salmon unies à ce centre de Salmon.

Un remarquable caractère simultané de l'axe de Steiner-Plücker et du centre de Salmon correspondant à un même trilatère est le suivant :

L'axe est la polaire trilinéaire du centre relativement au trilatère correspondant commun.

Cette proposition résulte de nos tableaux numériques. Pour l'établir, il faut montrer (mais nous n'avons pu jusqu'ici construire le

schéma démonstratif correspondant) que les deux points de concours des deux paires de droites

$$(b_{zv.wu},\ d_{xy.zv.wu}) \quad \text{et} \quad (b_{zw.uv},\ d_{xy.zw.uv})$$

(projections de J_{xy} par deux sommets du trilatère T_{xy} sur ses côtés opposés) sont alignés avec le point de Bally $B_{zu.vw}$ (trace de j_{xy} sur le troisième côté $d_{xy.zu.vw}$ du trilatère).

Les trois quadrangles (H^x_y, H^y_x, H_{xy}) ont *même quadrilatère de raccordement deux à deux* (quadrilatère simultanément et polairement inscrit à chacun de ces quadrangles) : c'est précisément le troisième quadrilatère h_{xy}. Chacun des six sommets de ce dernier est un point diagonal commun à trois côtés deux à deux homologues de ces quadrangles, lesquels sont deux pascales et une première latérale.

Le quadrangle de raccordement des quadrilatères h^x_y et h^y_x est le quadrangle d'éléments de premier rang inférieur ${}_{\overline{1}}H_{xy}$, qui a pour triangle conjugué le trilatère T_{xy}. Le quadrangle de raccordement de h^x_y et de h_{xy} est le quadrangle H^x_y, réciproque de h^x_y dans leur commune figure polaire x (quadrangle simultanément et polairement circonscrit aux deux quadrilatères envisagés). De même, le quadrangle de raccordement des quadrilatères h^y_x et h_{xy} est le quadrangle de kirkmanns H^y_x.

Observons enfin que les deux quadrilatères h^x_y et h^y_x sont non seulement, comme il a été dit, raccordables par l'axe de Steiner-Plücker j_{xy}, mais qu'ils sont en réalité *quadruplement raccordables*, car ils se raccordent en outre *par chacun des trois côtés du trilatère* T_{xy}. Exemple :

h^x_y	h^x_{yz},	h^x_{yu},	h^x_{yv},	h^x_{yw}
h^y_x	h^y_{xu},	h^y_{xz},	h^y_{xw},	h^y_{xv}
	$Q_{xu.yz}$,	$Q_{xz.yu}$,	$Q_{xw.yv}$,	$Q_{xv.yw}$

alignés sur $d_{xy.zu.vw}$.

Observation II. — A chaque côté $d_{xy.zu.vw}$ de l'hexangle sont unis trois paires de points diagonaux, qui sont chacune une paire de sommets de l'un des trois trilatères T_{xy}, T_{zu}, T_{vw}, et trois points de Bally, traces respectives des trois axes de Steiner-Plücker j_{xy}, j_{zu}, j_{vw}. Soit $P_{zu.vw}$ la trace sur ce côté de la droite de Bally $b_{zu.vw}$, c'est-à-dire la projection du centre de Salmon J_{xy} par le sommet du trilatère T_{xy} extérieur à ce côté ; à ce côté sont unis trois points P.

Le couple de sommets de chaque trilatère unis à ce côté est harmonique au couple formé de la trace B *de l'axe de Steiner-Plücker et de la projection* P *du centre de Salmon correspondants à ce trilatère, ainsi qu'au couple des deux autres points* B.

La première partie de la proposition résulte de ce que l'axe de Steiner-Plücker est la polaire trilinéaire du centre de Salmon relative au trilatère envisagé, et la deuxième de ce que les droites qui unissent le sommet (extérieur au côté) de l'un des trilatères aux deux points B non correspondants sont deux premières latérales harmoniques au couple de côtés de l'hexangle unis à ce point.

Observation III. — *Les divers quadrangles de points des diverses textures* ordinaires ou non *relatifs aux quatre hexagones* d'un même quadruplet d'isodiagonaux W_{xy} *sont deux à deux raccordables par le même centre de Salmon* J_{xy}; *le quadrilatère de raccordement de deux quelconques d'entre eux est le quadrilatère des fausses pascales :* k^z_{xy}, k^u_{xy}, k^v_{xy}, k^w_{xy}.

Car : 1° chaque sommet de chacun de ces quadrangles est uni à l'une des quatre droites de Cayley-Salmon qui concourent au centre mentionné; et 2° chaque côté de chacun de ces quadrangles est une latérale unie à l'un des six points de Bally qui sont les sommets du quadrilatère mentionné.

On verrait de même que les divers quadrilatères de droites des diverses textures réglées ordinaires ou non, relatifs à ce même quadruplet d'isodiagonaux, sont deux à deux raccordables par l'axe j_{xy}, leur quadrangle commun de raccordement étant le quadrangle des faux kirkmanns K^z_{xy}, K^u_{xy}, K^v_{xy}, K^w_{xy}.

Observation IV. — Nous devons au moins une mention aux droites de jonction de deux points diagonaux qui sont *les côtés des triangles conjugués des quadrangles de l'hexangle* (telle la droite de jonction des points $Q_{xy.zu}$ et $Q_{xy.vw}$).

Ces droites sont les polaires des points diagonaux relatives à la conique circonscrite à l'hexangle, et leur ensemble jouit de propriétés corrélatives de celles de l'ensemble des points diagonaux.

APPENDICE.

NOTES DU CHAPITRE XIII.

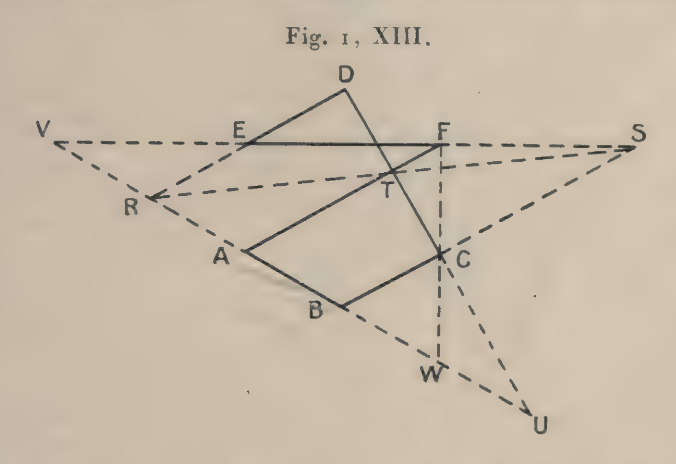
(1) Le caractère pascalien d'un hexangle est équivalent à l'un des trois autres caractères suivants :

1° X_1, X_2, Z, A, B, C étant les sommets de l'hexangle, et x_1, x_2 deux droites arbitraires *unies à* Z, les traces respectives sur x_1 et x_2 des deux triplets radiés X_1(ABC) et X_2(ABC) sont *perspectives*.

2° Sur un côté AB de l'hexangle, les deux sommets A, B, de ce côté, et deux paires de traces de deux paires de côtés opposés du quadrangle CDEF des quatre autres sommets, peuvent être considérés comme les trois paires de traces des trois paires de côtés opposés d'un même quadrangle, *et l'on dit alors que ces trois paires de points alignés forment une involution* (théorème secondaire de Desargues).

R, S, T, étant les trois points diagonaux principaux de l'hexagone pasca-

Fig. 1, XIII.



lien ABCDEF (R, *uni à* AB, est la trace du côté opposé DE), soient (*fig.* 1, XIII) U, V, W les traces respectives sur AB des côtés CD, EF, et de la diagonale principale CF. Les couples (U, V) et (R, W) sont deux paires de traces de deux paires de côtés opposés du quadrangle CDEF, et les trois couples (U, V), (R, W), (A, B) sont les paires de traces des paires de côtés opposés du quadrangle CFST.

3° Les polaires trilinéaires (*la polaire trilinéaire d'un point* relative à un triangle est *l'axe d'homologie de ce triangle et du triangle des projections du point faites par chaque sommet du premier sur son côté opposé*) des sommets d'un triangle de l'hexangle, relatives au triangle complémentaire, sont concourantes.

(*Voir*, par exemple, pour la propriété corrélative, l'Ouvrage précédent du même auteur : *Unicursales de troisième classe*, Chap. IV, 1, p. 64.)

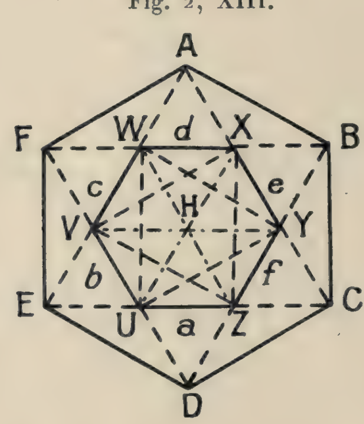
([2]) Deux triangles homologiques définissant (Volume suivant) *une réciprocité polaire* où ces deux triangles sont *polaires réciproques*, à chaque hexagone V^x_{yz} de l'hexangle est attachée une réciprocité polaire R^x_{yz}, *où ses deux trilatères de structure sont polaires réciproques.*

([3]) L'hexagone qui a pour *triangles* de sommets alternés *les trilatères de structure* d'un hexagone pascalien est donc *un hexagone de Brianchon*, et son *point de Brianchon* (point de concours des diagonales principales) est le point de Steiner du semi-système opposé à celui du premier hexagone. On voit aussi que la pascale d'un hexagone V^x_{yz} et le point de Steiner du semi-système opposé sont polaires réciproques dans la réciprocité R^x_{yz} attachée à cet hexagone (axe et centre d'homologie de ses trilatères de structure).

([4]) On a donc six nouvelles réciprocités polaires : R_x, R_y, R_z, R_u, R_v, R_w. La pascale et le kirkmann de tout hexagone du système (x) sont polaires réciproques dans la réciprocité R_x.

([5]) L'hexagone V^x_{yz} étant représenté par l'hexagone ABCDEF (*fig.* 2, XIII),

Fig. 2, XIII.



les deux triangles de pascales $h^{(y)}_{xz}$ et $h^{(z)}_{xy}$ envisagés dans la démonstration sont les triangles XZV, YUW, que forment *les diagonales secondaires de l'hexagone* XYZUVW qui a pour côtés *les diagonales secondaires a, b, c, d, e, f du premier.*

Les droites qui joignent les sommets opposés du second (diagonales principales) sont, d'après la démonstration, *les pascales des trois hexagones séparés du premier, et sont concourantes au kirkmann de ce premier.*

Le second est donc *un hexagone de Brianchon qui a pour point de Brianchon le kirkmann du premier.*

Donc, *deux triangles complémentaires d'un hexangle pascalien sont deux trilatères complémentaires d'un hexalatère brianchonien*, propriété qui s'énonce d'ordinaire : *Si deux triangles sont inscrits à une conique, ils sont circonscrits à une conique, et réciproquement.*

Cette propriété peut s'établir encore en observant que si deux triangles ont pour sommets respectifs (A, B, C), (D, E, F), et pour côtés respectifs (a, b, c) (d, e, f), l'involution déterminée sur l'axe f par les paires de côtés opposés du quadrangle ABCF et l'involution radiée déterminée au centre F par les paires de sommets opposés du quadrilatère *abcf, sont perspectives*. Si donc le couple (D, E) appartient à l'involution ponctuelle de f, *cas dans lequel l'hexangle des six sommets est pascalien* (théorème secondaire de Desargues), le couple (d, e), issu de F, appartiendra à l'involution radiée de centre F, et l'hexalatère des six côtés sera brianchonien (réciproque du corrélatif du même théorème).

Ainsi qu'on le verra au Volume suivant, deux tels triangles sont aussi *deux triangles autopolaires d'une même réciprocité polaire*.

Aux 10 paires de triangles complémentaires de l'hexangle, c'est-à-dire aux 10 systèmes de Steiner, correspondent 10 coniques $I_{xyz.uvw}$, chacune inscrite à deux triangles complémentaires, et 10 réciprocités de Steiner $R_{xyz,uvw}$, chacune conjuguée à deux tels triangles.

Deux quelconques des coniques inscrites I ont en évidence deux tangentes communes, car si l'on considère *deux* paires arbitraires distinctes de triangles complémentaires, chaque triangle d'une paire *a toujours un unique côté commun avec un seul triangle de l'autre paire* (autrement dit, deux hexagones *quelconques* du même hexangle ont toujours deux diagonales secondaires communes non unies à un même sommet de l'hexangle), et ces deux droites communes aux deux paires sont les deux tangentes communes en question.

Ces deux droites forment aussi *un couple de cordes communes* aux deux réciprocités de Steiner respectivement conjuguées aux deux triangles de l'une et de l'autre de ces deux paires de triangles.

Car les deux involutions portées par une même de ces deux droites, et respectivement conjuguées à l'une et à l'autre de ces réciprocités, se confondent toutes deux avec l'involution déterminée sur cette droite par le quadrangle des quatre sommets de l'hexangle extérieurs à cette droite.

Le kirkmann d'un hexagone pascalien est aussi le pôle de la pascale de cet hexagone dans la réciprocité de Steiner conjuguée aux deux triangles de diagonales secondaires de cet hexagone.

Il suffit d'observer que, dans la réciprocité envisagée et conjuguée aux deux triangles ACE, BDF (même figure 2, XIII), l'hexagone pascalien ABCDEF a pour polaire réciproque l'hexagone brianchonien *abcdef* qui a pour point de Brianchon le kirkmann du premier.

Une réciprocité de Kirkmann R_x *et une réciprocité de Steiner* $R_{xyz.uvw}$ *ont en évidence une commune paire d'éléments réciproques, savoir le kirkmann et la pascale de l'hexagone* V_{yz}^{x}, *commun aux deux systèmes correspondants* (de Kirkmann et de Steiner).

([6]) La droite de Cayley-Salmon d'un semi-système steinérien est donc *la polaire du point de Steiner de ce semi-système dans la réciprocité de Steiner correspondant à ce système.*

([7]) La propriété d'un point de Steiner d'être uni à la droite de Cayley-Salmon du semi-système opposé est équivalente, d'après la note précédente ([6]) à celle-ci :

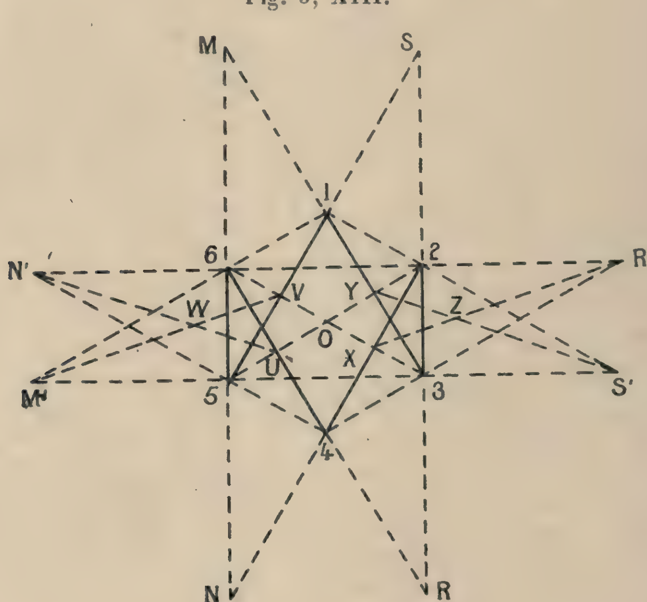
Théorème A. — *Les deux points de Steiner* d'un même couple, *c'est-à-dire appartenant à deux semi-systèmes opposés, sont conjugués dans la réciprocité de Steiner correspondant à leur système* (conjuguée aux deux triangles complémentaires correspondants de l'hexangle).

Les deux points de Steiner d'un même couple jouissent encore d'autres propriétés.

Théorème B. — *Deux points de Steiner d'un même couple sont conjugués à la conique circonscrite à l'hexangle.*

Le centre d'homologie de deux trilatères de structure de l'hexagone 132465 (*côtés en trait plein* sur la figure 3, XIII) étant au point de concours des

Fig. 3, XIII.



droites MR et NS (droites de jonction *non tracées sur la figure* de sommets homologues des deux paires de sommets M, N et R, S de ces trilatères), et son point de Steiner étant au point de concours des droites XY et UV (*non tracées sur la figure*, pascales des deux autres hexagones 146325 et 142563 du même semi-système steinérien que le premier), il faut montrer que la polaire du premier point, par exemple, relative à la conique circonscrite, est unie au second.

Les points M, N, R, S ont pour polaires respectives les droites M'V, N'U, R'X, S'Y (car, par exemple, M' et V sont les deux autres points diagonaux du quadrangle inscrit 1653 qui a un point diagonal en M).

W étant le point de concours des deux premières droites M'V et N'U (et par conséquent le pôle du côté 56 qui porte les pôles M et N de ces droites),

et Z étant le point de concours des deux dernières R′X et S′Y (pôle du côté 23), nous devons établir que la droite de jonction des centres des deux paires (M′V, R′X) et (N′U, S′Y) (*polaire du centre d'homologie des trilatères de l'hexagone* 132465) est unie au centre de la paire (XY, UV), ou que les centres de ces trois paires sont alignés, ce qui revient à dire que les deux triangles WUV, ZYX formés par ces droites sont homologiques, *ou que* WZ *est unie au centre* O *de la paire* (UY, VX).

Or WZ, unissant les pôles des côtés 56 et 23, est la polaire du point de concours de ces côtés, *lequel est conjugué du point* O (ces deux points étant deux points diagonaux du quadrangle inscrit 5623. C. Q. F. D.

Théorème C. — *La droite de jonction de deux points de Steiner opposés porte aussi les* centres polaires, *relatifs à la conique circonscrite*, *des deux triangles complémentaires caractéristiques du système*, *et ces deux paires de points sont harmoniques.*

(Le centre et l'axe polaires d'un triangle relatifs à une conique sont le centre et l'axe d'homologie de ce triangle et du triangle polaire réciproque.)

Nous allons recourir à une figure déjà mentionnée (Chap. I, § IV, 2), et considérer *les deux triangles de sommets alternés communs aux six hexagones d'un système de Steiner* comme les traces respectives de deux triplets de droites d'un même plan quaternaire (uni au plan ternaire de l'hexangle), où deux droites d'un même triplet sont non incidentes, deux droites de triplets distincts étant incidentes.

Soient (d_a, d_b, d_c) et (t_i, t_j, t_k) ces deux triplets de droites. Un sommet de l'hexangle sera désigné par la lettre S, affectée de l'indice de la droite (d ou t) qui a sa trace en ce point. Nous désignerons le point d'incidence et le plan d'incidence d'une droite d avec une droite t par les lettres respectives Z et ζ, affectées de la combinaison binaire des indices attachés à ces droites.

Les 6 droites (d, t) forment 9 quadragones gauches dont les 18 *diagonales* peuvent se grouper soit en 6 *triangles*, soit en 6 *trièdres*.

Par exemple, les trois diagonales $Z_{ai}Z_{bj}$, $Z_{bj}Z_{ck}$, $Z_{ck}Z_{ai}$ forment un *triangle* qui a pour sommets Z_{ck}, Z_{ai}, Z_{bj}, tandis que leurs *opposées* (¹) $Z_{aj}Z_{bi}$, $Z_{bk}Z_{cj}$, $Z_{ci}Z_{ak}$, forment un *trièdre* qui a pour faces opposées à ces arêtes : ζ_{ck}, ζ_{ai}, ζ_{bj} (*fig.* 4, XIII : droites d, t seules tracées).

Comme le plan de chaque triangle est uni aux centres des trois trièdres auxquels appartiennent respectivement les trois diagonales que contient ce plan, on voit que les plans des six triangles et les centres des six trièdres se répartissent, les uns en deux triples de plans coaxiaux, les autres en deux triples de points alignés, les *axes* des deux triples de plans n'étant autres d'ailleurs que les *supports* des deux triples de points.

Soient g_1 et g_2 ces deux droites, *à la fois supports des centres des six trièdres et axes des plans des six triangles.*

La trace d'une diagonale précédente $Z_{ai}Z_{bj}$ sur le plan de l'hexangle donné

(¹) Nous qualifions d'*opposées* deux diagonales d'un *même* quadragone.

est le point de concours des côtés S_aS_j et $S_b S_i$ de l'hexangle, car cette diagonale est commune aux plans ζ_{aj} et ζ_{bi} qui ont pour traces ces côtés. Le plan du triangle $Z_{ai}Z_{bj}Z_{ck}$ contient donc les trois centres des trois paires de droites : (S_aS_j, S_iS_b), (S_jS_c, S_bS_k), (S_cS_i, S_kS_a), *points diagonaux principaux de l'hexagone* $S_aS_jS_cS_iS_bS_k$, et a pour trace *la pascale de cet hexagone.*

Fig. 4, XIII.

Les pascales des six hexagones tels que le précédent, qui ont pour *triples de sommets alternés* (S_a, S_b, S_c), (S_i, S_j, S_k), forment donc *deux triples de droites concourantes aux traces des droites* g_1 *et* g_2, traces qui sont les deux points de Steiner du système de ces hexagones.

Les deux droites g_1, g_2 *sont polaires réciproques relativement à la quadrique* Q *qui porte les six droites* (d, t), car à chaque centre d'un trièdre uni à l'une correspond le plan, *uni à l'autre*, des trois diagonales respectivement opposées à celles du trièdre, deux diagonales *opposées*, c'est-à-dire d'un même quadragone, étant d'ailleurs polaires réciproques relativement à la quadrique Q des droites (d, t) (²).

Les deux autres paires d'arêtes opposées du tétraèdre des quatre points d'incidence des droites g_1 et g_2 sur la quadrique Q sont donc formées : l'une de deux génératrices de la semi-quadrique Q_d qui porte les droites d, l'autre de deux génératrices de la semi-quadrique Q_t relative aux droites t,

On voit aisément que ce couple de génératrices de Q_d, par exemple, est formé des droites doubles (imaginaires) *de l'homographie cyclique binaire de troisième ordre définie sur cette semi-quadrique* Q_d *par le cycle* (d_a, d_b, d_c).

Considérant en effet les trois droites d et deux des droites t, soit t_i et t_j,

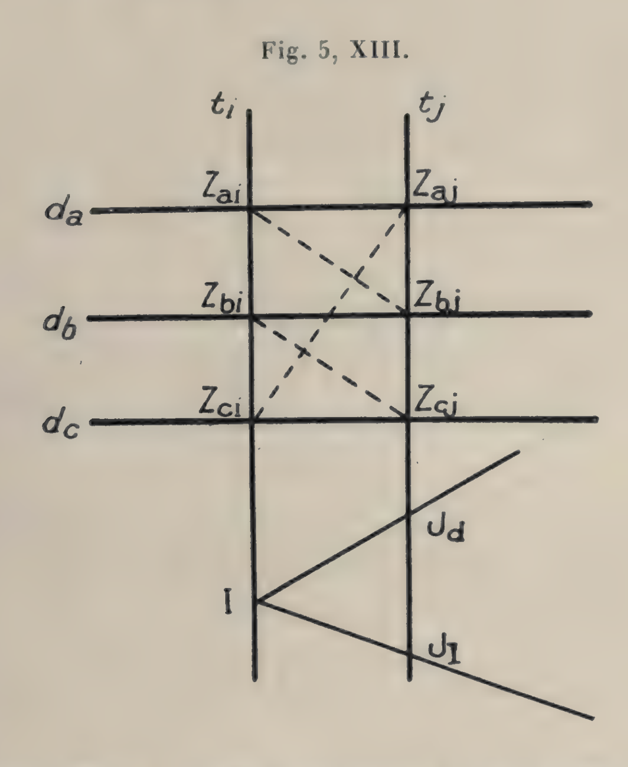
(²) On retrouve donc cette propriété que les deux points opposés de Steiner (traces des droites g_1 et g_2) sont conjugués à la conique (trace de la quadrique Q) circonscrite à l'hexangle.

les six diagonales des trois quadragones de ces droites se partagent en deux triples

$$(Z_{ai}Z_{bj},\ Z_{bi}Z_{cj},\ Z_{ci}Z_{aj}),\quad (Z_{ai}Z_{cj},\ Z_{bi}Z_{aj},\ Z_{ci}Z_{bj}),$$

où deux droites d'un même triple sont non incidentes, ces deux triples déterminant deux semi-quadriques (non complémentaires) Q_1 et Q_2 (*fig.* 5, XIII; *diagonales premier triple seules tracées*).

Fig. 5, XIII.



Les deux droites g_1, g_2, chacune incidente à trois diagonales d'un même triple, appartiennent : la première, par exemple à la semi-quadrique Q'_1, complémentaire de Q_1, et la seconde, à la semi-quadrique Q'_2, complémentaire de Q_2.

Q'_1 et Q_t ayant deux génératrices communes t_i et t_j, leurs complémentaires Q_1 et Q_d auront aussi deux génératrices communes, *unies aux points d'incidence, sur la quadrique* Q *de la droite* g_1, et qui sont donc les deux génératrices que nous cherchons à caractériser.

Or, une génératrice de Q_d et une génératrice de Q_1, unies à un même point I de t_i, rencontrent t_j aux points J_d et J_1, tels que :

$$Z_{ai}Z_{bi}Z_{ci}\,\mathrm{I} \;\mathbf{\Sigma}\; Z_{aj}Z_{bj}Z_{cj}J_d;\quad Z_{ai}Z_{bi}Z_{ci}\,\mathrm{I} \;\mathbf{\Sigma}\; Z_{bj}Z_{cj}Z_{aj}J_1.$$

Pour que les points J_d et J_1 se confondent, ce qui entraîne la coïncidence des génératrices envisagées, il faut donc que

$$Z_{aj}Z_{bj}Z_{cj}J_d \;\mathbf{\Sigma}\; Z_{bj}Z_{cj}Z_{aj}J_d,$$

relation qui définit J_d comme un élément double de l'homographie cyclique déterminée sur t_j par le triple (Z_{aj}, Z_{bj}, Z_{cj}) (3).

Les éléments doubles d'une homographie binaire peuvent être caractérisés par une *involution* dite *attachée* à cette homographie, et dont les divers couples sont formés chacun d'un élément arbitraire *et de l'harmonique de cet élément relatif au couple de son transformé et de son antitransformé par l'homographie binaire.*

En particulier, les éléments doubles de l'homographie cyclique de troisième ordre définie par un cycle de trois éléments sont caractérisés *par l'involution où se correspondent chacun de ces trois éléments et son harmonique relatif au couple des deux autres.*

Sur le plan de l'hexangle, l'homographie cyclique relative au triplet de génératrices de Q_d, par exemple, détermine sur la conique circonscrite à l'hexangle une homographie cyclique définie par le triple de sommets (S_a, S_b, S_c); l'involution attachée sur cette conique à cette homographie a pour *centre* le point de concours des trois droites qui joignent chacun de ces trois sommets à son harmonique (sur la conique) relatif au couple des deux autres, c'est-à-dire des trois droites dont chacune est unie à un sommet du triangle $S_a S_b S_c$ et est *conjuguée* du côté opposé. Ce point est donc le *centre polaire du triangle*, et l'*axe* de l'involution envisagée (polaire de son centre) est l'*axe polaire du triangle.*

L'axe polaire du triangle $S_a S_b S_c$ *est donc la corde de jonction* (4) *des traces des deux génératrices* (imaginaires) *de* Q_d *auxquelles sont incidentes les deux droites* g.

Conclusion. — Sur un plan arbitraire, les triplets initiaux (d_a, d_b, d_c) et (t_i, t_j, t_k) ont pour traces deux triangles $S_a S_b S_c$ et $S_i S_j S_k$ inscrits à une même conique, trace de la quadrique Q qui porte les six droites (d, t).

Le tétraèdre des points d'incidence, sur la quadrique, des droites g_1 et g_2 correspondant à la paire de triplets (d, t), a pour trace un quadrilatère qui a deux sommets opposés (traces des deux droites g) aux points de Steiner correspondant à la précédente paire de triangles. Le *quadrangle* des quatre

---

(3) Les deux paires de droites (g_1, g_2) et (g'_1, g'_2), relatives à un même triple (d_a, d_b, d_c) de Q_d et à deux triples distincts (t_i, t_j, t_k) et (t'_i t'_j, t'_k) de Q_t, *appartiennent à une même semi-quadrique*, propriété due à ce que les quatre droites g rencontrent deux mêmes génératrices de Q_d et que deux droites g d'une même paire sont polaires réciproques relativement à Q.

(4) Celle des deux droites g qui est unie au plan de l'un des six triangles primitifs de diagonales, tels que $Z_{ai} Z_{bj} Z_{ck}$, est l'axe polaire de ce triangle relatif à la conique de section de la quadrique Q.

Car la trace de g sur $Z_{ai} Z_{bj}$, par exemple, est le point de concours commun aux trois diagonales $Z_{ai} Z_{bj}$, $Z_{bk} Z_{ci}$, $Z_{cj} Z_{ak}$, c'est-à-dire la trace, sur la première, du plan des deux autres, lequel est le plan ζ_{ck} des droites d_c et t_k, *plan tangent à la quadrique* Q *en* Z_{ck}; cette trace de la droite g sur le côté du triangle envisagé se confond donc avec la trace de la tangente, au sommet opposé, à la conique-section de Q.

autres sommets de ce quadrilatère (traces des deux paires de génératrices maginaires des semi-quadriques Q_d et Q_t) *est inscrit à la conique circonscrite aux deux triangles* et deux côtés opposés de ce quadrangle inscrit (joignant chacun respectivement les traces de deux génératrices imaginaires d'une même paire) sont *les axes polaires de ces triangles relatifs à la conique circonscrite.*

Relativement à la conique circonscrite les centres polaires étant *les pôles* des axes polaires, le théorème se ramène donc à cette proposition évidente :

« *Les pôles de deux côtés opposés d'un quadrangle, relatifs à une conique circonscrite à ce quadrangle, sont unis à la droite de jonction des deux points diagonaux de ce quadrangle* autres que le point de concours des côtés envisagés, *et ces deux couples de points sont harmoniques.* »

C. Q. F. D. (5).

Donnons aussi, bien qu'il ne concerne plus les points de Steiner, le théorème suivant, en corollaire des précédents.

Théorème D. — *Si l'on considère les triangles conjugués d'une réciprocité polaire* R, *qui sont inscrits à une conique* C (harmoniquement circonscrite à R), *et par conséquent circonscrits à une conique* I (harmoniquement inscrite à R, et polaire réciproque de C relative à R) : 1° *les centres polaires* K_c *de ces triangles, relatifs à la conique circonscrite* C, *décrivent une conique* (K_c) du faisceau ponctuel (R, C), *tandis que leurs axes polaires* k_i, *relatifs à la conique inscrite* I, *touchent une conique* (k_i) du faisceau tangentiel (R, I); 2° *les centres polaires* K_i, *relatifs à* I, *décrivent une conique* (K_i) du faisceau ponctuel (C, I), *tandis que les axes polaires* k_c, *relatifs à* C, *touchent une conique* (k_c) du faisceau tangentiel (C, I) (6).

1° Les centres polaires, relatifs à C, de deux quelconques de ces triangles, étant alignés avec les deux points de Steiner définis par ces deux triangles *complémentaires dans un même hexangle pascalien*, et étant harmoniques à ces deux points de Steiner, appartiennent à une même conique (K_c) du faisceau ponctuel (R, C), puisque (Théorèmes A et B) ces deux points de Steiner sont *simultanément conjugués à* R *et à* C.

Corrélativement, les axes polaires, relatifs à I, touchent une conique (k_i) du faisceau *tangentiel* (R, I), conique polaire réciproque, relative à R, de la conique (K_c) décrite par les centres précédents. C. Q. F. D.

---

(5) On peut reprocher à cette démonstration, quoique intéressante, de n'être pas *linéaire*, alors que les éléments envisagés dans l'énoncé du théorème sont *linéairement déterminables*.

Si le lecteur possède ou trouve une démonstration *linéaire et directe* du présent théorème, analogue à celle du Théorème B, nous lui serions très reconnaissant qu'il eût l'obligeance de nous la communiquer.

(6) Au Volume suivant (Chap. XIV), il sera donné, de la première partie de ce Théorème D, une autre démonstration, indépendante des propriétés des points de Steiner.

2° L'axe polaire k_c relatif à C touche alors une conique (k_c) polaire réciproque de (K_c) relative à C, appartenant donc *au faisceau tangentiel déterminé par* C *et la polaire réciproque d* R *relative à* C. Désignons, conformément à la notation usitée dans la théorie des transformations, par CRC et RCR les polaires réciproques *de* R *relativement à* C *et de* C *relativement à* R. Le faisceau tangentiel auquel appartient (k_c) est le faisceau (C, CRC); la conique RCR n'est autre que la conique I, et nous devons montrer que le faisceau tangentiel (C, CRC) coïncide avec le faisceau tangentiel (C, I), c'est-à-dire que *les trois coniques* C, CRC, RCR, *appartiennent à un même faisceau tangentiel.*

Les deux faisceaux tangentiels (C, CRC) et (R, RCR), déterminés par chacune de deux coniques *quelconques* C, R, et la polaire réciproque *de l'autre relative à la première*, sont respectivement inscrits à chacun des deux quadrilatères de tangentes à la conique correspondante (C ou R) en ses points d'incidence avec l'autre conique (R, ou C). Ils ont donc une conique commune, celle qui touche les huit tangentes aux deux coniques R et C en leurs points d'intersection, et qui est définie comme l'*enveloppe des droites qui rencontrent les coniques* R *et* C *en deux couples harmoniques.*

Dans le cas actuel, la conique C étant circonscrite à des triangles conjugués à R, les droites qui satisfont à cette condition sont *les côtés de ces triangles*, qui enveloppent évidemment la polaire réciproque RCR de C relative à R, c'est-à-dire la conique I, laquelle est donc la conique commune aux deux faisceaux tangentiels.

Corrélativement, le centre polaire K_i relatif à I décrit une conique (K_i) du faisceau *ponctuel* (C, I), polaire réciproque *de* (k_i) *relativement à* I *et de* (k_c) *relativement à* R.

([8]) Une question se pose naturellement ici : A quoi peuvent correspondre les six autres décompositions de l'ossature?

Ajoutons, pour compléter ce qui a trait à la configuration d'ossature, qu'à chaque $g(3, 6)$ de la configuration est attaché un triangle, trace de la cubique gauche circonscrite à l'hexangle gauche susceptible d'avoir pour trace la $g(3, 6)$.

Par exemple, pour la $g(3, 6)$ des droites de Cayley-Salmon, aux cinq points J dont les combinaisons binaires contiennent un même indice donné correspond la conique circonscrite à leur pentangle; aux six valeurs que l'on peut donner à cet indice correspondent six coniques *qui sont toutes circonscrites à un même triangle*, trace de la cubique gauche précédente, ces coniques étant elles-mêmes les traces des cônes du second ordre qui, ayant leur centre en l'un des sommets de l'hexangle gauche, en contiennent les cinq autres sommets.

De même, les six coniques qui touchent chacune cinq droites j affectées d'un même indice, sont toutes inscrites à un même triangle.

ADDITIONS ET CORRECTIONS

A L'OUVRAGE PRÉCÉDENT DU MÊME AUTEUR :

Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre.

CHAPITRE I.

Page 1, ligne 3 en remontant, *au lieu de* ou direction, *lisez* ou directrice; ligne 2 en remontant *au lieu de* rayon (infini), *lisez* (rayon infini).

Page 9, avant dernière ligne, *au lieu de*

$$\frac{R_2}{\lambda_2} = \frac{R_1}{\lambda_1},$$

lisez

$$\frac{R_2}{\lambda_2} = \varepsilon \frac{R_1}{\lambda_1}.$$

Mais il vaut mieux supposer que les rayons des deux générateurs soient affectés du signe positif ou négatif, suivant que leurs contacts *sur la glissière* sont *directs* ou *inverses ;* les ε disparaissent alors des formules, qui conviennent aux deux cas *hypo* ou *épi*.

Pages 13-18, *supprimer* les figures 3 et 4, en les *remplaçant* par l'*unique* figure 1, que l'on complétera en prenant les points A_1 et A_2, *diamétralement opposés du point traçant* A *sur chacun des deux générateurs qui portent ce point, et alignés avec le centre commun* O *du directeur et de la glissière.* Les traces respectives ρ, σ de leur droite de jonction OA_1A_2 sur la normale et sur la tangente en A sont les extrémités du segment de courbure et du segment rectifiant.

On peut alors remplacer la dernière moitié de la page 15, et les pages 16 et 17 par ce qui suit :

Sur la figure ainsi complétée se lit immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Le rayon de courbure et le segment rectifiant sont harmoniquement divisés, le premier par le directeur, le second par la glissière.*

Car les segments interceptés sur la normale par le directeur et sur la tangente par la glissière sont projetés *du centre* O par un même couple de

rayons $OG_1E_1I_1$, $OG_2E_2I_2$, *côtés du parallélogramme articulé* OG_1AG_2, et le rayon de courbure et le segment rectifiant sont aussi *simultanément* projetés du centre O par un même couple de rayons *harmonique au premier* (*diagonale* OA *du parallélogramme articulé et parallèle* OA_1A_2 *à l'autre diagonale* G_1G_2).

Corollaire. — *Les longueurs* ρ_S *du rayon de courbure au sommet et* σ_V *du segment rectifiant en un rebroussement sont donc celles de deux segments dont le premier divise harmoniquement un diamètre du directeur et a une extrémité sur la glissière, le second ayant une extrémité sur le directeur et divisant harmoniquement un diamètre de la glissière.*

Ces segments sont donc déterminés par les formules

$$\rho_S . R_\gamma = \sigma_V . R_\delta = R_\gamma^2 - R_\delta^2 = 4 R_1 R_2.$$

Ils se déterminent d'ailleurs immédiatement *sur la même figure* 1 (complétée) par cette remarque :

« *Sur le rayon uni au centre* O *du directeur et au centre* (G_1 ou G_2) *de l'un des générateurs portant le point traçant* A, *le segment intercepté par la tangente en* A *et sa parallèle issue du centre de courbure correspondant* (normale à la développée) *est égal* (en vertu de la projectivité de la division harmonique) *au rayon de courbure principal* ρ_S, *tandis que le segment intercepté par la normale et sa parallèle issue du pied d'incidence normale de la tangente sur la développante est égal au segment rectifiant principal* σ_V. »

Le rayon de courbure (ρ_A) et le segment rectifiant (σ_A) au point A étant, d'après cette remarque, les projections *orthogonales* sur la normale et la tangente de deux segments portés par le rayon uni aux centres du directeur et d'un générateur (par exemple, le rayon OG_1), *segments respectivement égaux au rayon de courbure principal* ρ_S *et au segment rectifiant principal* σ_V, on a, en désignant par n et t les angles (complémentaires) du rayon envisagé avec la normale et la tangente en A :

$$\rho_A = \rho_S \cos n, \qquad \sigma_A = \sigma_V \cos t$$

Page 18, ligne 18, *lisez*

$$W = \frac{1}{8} \frac{R_\gamma}{R_\delta} (R_\delta^2 - R_\gamma^2)\pi.$$

Page 22, ligne 14, *au lieu de* VH $= -3$, *lisez* VH $= 3$.

Page 25, Classe des Cycloïdes algébriques :

Comme on l'a déjà dit (2), les extrémités des arcs d'un générateur, qui ont même origine au point traçant A, et dont les amplitudes sont représentées par l'expression générale

$$K . 2\pi \frac{R_\delta}{R_g},$$

décrivent toutes la même trajectoire que le point A; les tangentes en ces points sont toutes unies au contact du générateur envisagé sur la glissière, et forment en ce point *un faisceau régulier*.

Si les rayons R_g et R_δ sont entre eux comme les nombres premiers entre eux m_1 et n, les points précédents sont au nombre de m_1 (y compris le point A), et sont les sommets d'un m_1- gone régulier inscrit au générateur envisagé, et décrivant tous la même trajectoire. En considérant successivement un même point de la glissière comme le contact de l'un ou de l'autre des deux générateurs, on voit qu'à ce point sont unis deux faisceaux réguliers de m_1 et de m_2 tangentes. La classe de la courbe est donc égale à $m_1 + m_2$, ou encore au nombre n des rebroussements, dans le cas de l'hypocycloïde, ou à ce nombre n augmenté du plus petit des nombres m_1, m_2, dans le cas de l'épicycloïde.

CHAPITRE II.

Page 41, sur la figure 10, *au lieu des* lettres r et r', *lisez* γ et γ'.

Page 44, ligne 6, *au lieu de* Car pour une translation, *lisez* Car par une translation.

CHAPITRE III.

Page 49, sur la figure 11, à l'intersection de l'axe ROS et de la droite APC, rétablir la lettre T (mal imprimée).

Pages 53, dernière ligne, et 54, première ligne, *au lieu de* chacune de trois, ellipses, *lisez* chacune de trois ellipses.

Page 55, lignes 5-6, *au lieu de* du contact sur le cercle inscrit, *lisez* du contact de cette conique sur le cercle inscrit.

Page 57, après la ligne 8, *ajouter ceci :*

Transportées à l'hypocycloïde, les propriétés précédentes se transforment ainsi :

1° La tangente à l'hypocycloïde en un point A est une direction asymptotique de l'hyperbole équilatère circonscrite aux rebroussements et qui passe en A. Le centre O et cette direction asymptotique d'une part, le point A et le quatrième point d'incidence de cette hyperbole sur le cercle circonscrit d'autre part, sont deux couples de points harmoniques sur cette hyperbole

2° Si trois coniques K_x, K_y, K_z, circonscrites aux rebroussements, sont tangentes à l'hypocycloïde, et si B_x, B_y, B_z sont les quatrièmes points de rencontre de ces coniques deux à deux (B_x, commun à K_y et à K_z, etc.), les trois points B sont alignés (car leurs inverses sont les sommets d'un triangle de trois tangentes au cercle inscrit, lequel triangle est inscrit à une conique circonscrite aux rebroussements, ces deux triangles étant circonscrits au cercle inscrit).

A_x, A_y, A_z étant les contacts respectifs des coniques K sur l'hypocycloïde, les trois coniques C_x, C_y, C_z, circonscrites aux rebroussements et respective-

ment unies chacune à un point A et au point B de même indice, sont concourantes (au point inverse du centre polaire du triangle des tangentes au cercle inscrit, droites inverses des coniques K).

Si les tangentes à l'hypocycloïde en A_x, A_y, A_z *sont concourantes, leur point de concours se confond avec le point de concours des trois coniques* C. *Une hyperbole équilatère circonscrite aux rebroussements et passant aux deux points d'incidence sur l'hypocycloïde d'une tangente en un point* A (soit A_x) *passe au point* B_x.

Page 58, ligne 6 en remontant, *au lieu de* qui touche le directeur en P), *lisez* qui touche le direeteur en C).

CHAPITRE IV

Page 64, ligne 8 du texte, *au lieu de* centro O, *lisez* centro P.

Page 65, ligne 13, *au lieu de* par l'homologie harmonique de centre O, *lisez* par l'homologie involutive de centre X_1.

Page 69, ligne 5, *au lieu de* l'homologie harmonique, *lisez* l'homologie involutive.

Page 70, ligne 7 en remontant, *au lieu de* réciprocité Σ_α où se correspondent, *lisez* réciprocité Σ_α *conjuguée* à $X_1 X_2 X_3$ et où se correspondent.

Page 75, ligne 6 en remontant, *au lieu de* et l'on posera, *lisez* ou l'on posera; ligne 5 en remontant, *au lieu de* $v = 1$, *lisez* $\nu = 1$.

Page 77, ligne 28, *au lieu de* inscrites ou, *lisez* inscrites au.

Page 81, ligne 14, Le dernier facteur de cette ligne, *au lieu de*

$$(U + V + W + 9W)$$

est

$$(U + V + W - 9W).$$

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.